

Die Gültigkeitsgrenzen des Darcyschen Gesetzes bei Sanden und Kiesen¹⁾

Dipl.-Ing. M. L u d e w i g , Leipzig

DK 626.8:631.432.3

Einleitung

Der vorliegende Beitrag befaßt sich nach einer kurzen Darstellung unserer gegenwärtigen Kenntnisse über das Filtergesetz und die Gültigkeitsgrenzen des Darcy-Gesetzes, die eingehend in [13] beschrieben werden, mit der Grenze beim Übergang von zähigkeits- zu trägheitsbedingter Filterströmung in Sanden und Kiesen. Die Grundlage dafür bilden Ergebnisse systematischer experimenteller Untersuchungen an verschiedenen porösen Medien, die im Rahmen eines Forschungsauftrages in den Jahren 1963/64 durchgeführt wurden [14].

Der gegenwärtige Erkenntnisstand

Der Mechanismus der Filtrationsströmung ist außerordentlich kompliziert und unterscheidet sich von demjenigen beim Durchfluß in Rohrleitungen und Gerinnen zum Teil wesentlich. Bei der Flüssigkeitsbewegung durch die Porenräume der verschiedensten porösen Medien ist es im Gegensatz zu den Rohrleitungen und Gerinnen nicht möglich, die geometrischen Verhältnisse exakt zu erfassen. Die Gesetzmäßigkeit des Durchflusses wird hier nicht nur durch die physikalisch-mechanischen, sondern auch durch die physikalisch-chemischen Verhältnisse des porösen Mediums und des Durchflußmediums bestimmt. Generell wirken die verschiedensten Faktoren gleichzeitig, ihr Einfluß auf die Gestaltung der Gesetzmäßigkeit ist jedoch bei den verschiedenen porösen Medien und möglichen Strömungsintensitäten unterschiedlich. Allgemein wird das Filtergesetz bekanntlich durch das Potenzgesetz, seine polynome Form, vielfach auch durch die allgemeine Druckabfallgleichung in folgender Weise ausgedrückt:

$$I = C \cdot v_f^m = a v + b v^2 + \dots + z \cdot v^n \quad (1)$$

bzw.

$$I = \lambda \frac{v_f^2}{2g \cdot d_w} \quad (2)$$

¹⁾ Beitrag aus der Hochschule für Bauwesen Leipzig

Aus dem vom Verfasser in Bild 1 auf Grund bisheriger Untersuchungen über das Filtergesetz beim Durchfluß von Wasser durch die natürlichen Lockersedimente zusammengestellte Schema ist die wesentliche Gestaltung der Gesetzmäßigkeit ersichtlich, und man erkennt folgende großen Bereiche:

1. laminare Strömung
 - a) nichtlineare Gesetzmäßigkeit bei entscheidendem Einfluß der liotropen Erscheinungen
 - b) lineare Gesetzmäßigkeit bei kleinem Einfluß der liotropen Erscheinungen und der Trägheitskräfte (Gesetz von *Darcy*)
 - c) nichtlineare Gesetzmäßigkeit bei wachsendem Einfluß der Trägheitskräfte bis zum Beginn der Turbulenz
2. teilturbulente Strömung
3. turbulente Strömung („voll ausgebildete“ Turbulenz)

Die Gesetzmäßigkeit im prälinearen Bereich (Bereich der Mikrosickerung) wird durch den physikalisch-mechanischen Aufbau und die mineralogisch-chemischen Eigenschaften der sogenannten „bindigen“ Sedimente bestimmt. Die physikalisch-mechanischen Eigenschaften und der Kationenhaushalt dieser porösen Medien sind die Ursache für die teilweise beträchtlichen Hydratationserscheinungen, deren Größenordnung bekanntlich durch die Hygroskopizität, die Benetzungswärme und die Lentokapillarität zum Ausdruck kommt. Als Folge dieser von *Stepicka* [24] als liotrophe Erscheinungen bezeichneten Einflüsse ergibt sich der „freie Durchflußquerschnitt“ nach *Müller-Delitzsch* als dynamische Größe, das Durchflußmedium oder zumindest ein Teil davon stellt keine einfache Newtonsche Flüssigkeit mehr dar, und die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen besitzen keine Gültigkeit. Als Schubspannungsgesetz wird von den verschiedensten Autoren ([5], [8], [16], [17] u. a.) das Bingham'sche Gesetz als gültig angesehen. Trotz zahlreicher mineralogisch-chemischer und rheologischer Untersuchungen bestehen in diesem Bereich für die Formulierung der Filtrationsgesetzmäßigkeit noch die größten Schwierigkeiten.

Im linearen Bereich wird der Einfluß der liotropen Erscheinungen als gering vorausgesetzt, was insbesondere für die Lockersedimente der Sande und Kiese zutrifft. Das Durchflußmedium Wasser ist hier eine einfache Newtonsche Flüssigkeit, wofür das Newtonsche Schubspannungsgesetz gilt. Unter Voraussetzung eines geringen Einflusses der Trägheitskräfte ergibt sich aus den Navier-Stokesschen Gleichungen die Strömungsgleichung von Hagen-Poiseuille, die eine gute hydrodynamische Begründung des in zahlreichen experimentellen Arbeiten als gültig nachgewiesenen empirischen Darcyschen Gesetzes darstellt.

Der Übergang vom linearen in den postlinearen Bereich vollzieht sich nicht wie bei der Strömung in Rohren plötzlich, sondern infolge des besonderen physikalisch-mechanischen Aufbaues der porösen Medien allmählich. Die ersten

Abweichungen vom linearen Gesetz werden in der neueren Literatur dem wachsenden Einfluß der Trägheitskräfte zugeschrieben, die von der Tortuosität abhängen und mit zunehmender Strömungsintensität wachsen.

Die Gesetzmäßigkeit im postlinearen Bereich ist nicht einheitlich. Im „Übergangsbereich“ zeigt sich der Widerstandskoeffizient als Funktion der Strömungsintensität (*Re*-Zahl) und der physikalisch-mechanischen Eigenschaften des porösen Mediums. Bei der „vollständig ausgebildeten“ Turbulenz existiert der Exponent $m = 2,0$, und der Widerstandskoeffizient ist lediglich von den Materialkennziffern (physikalisch-mechanische Eigenschaften) abhängig. Noch nicht geklärt ist die Frage, ob in diesem Bereich die scheinbare Schubspannung der Turbulenz für den Strömungswiderstand maßgebend ist, denn offenbar stellen nicht allein

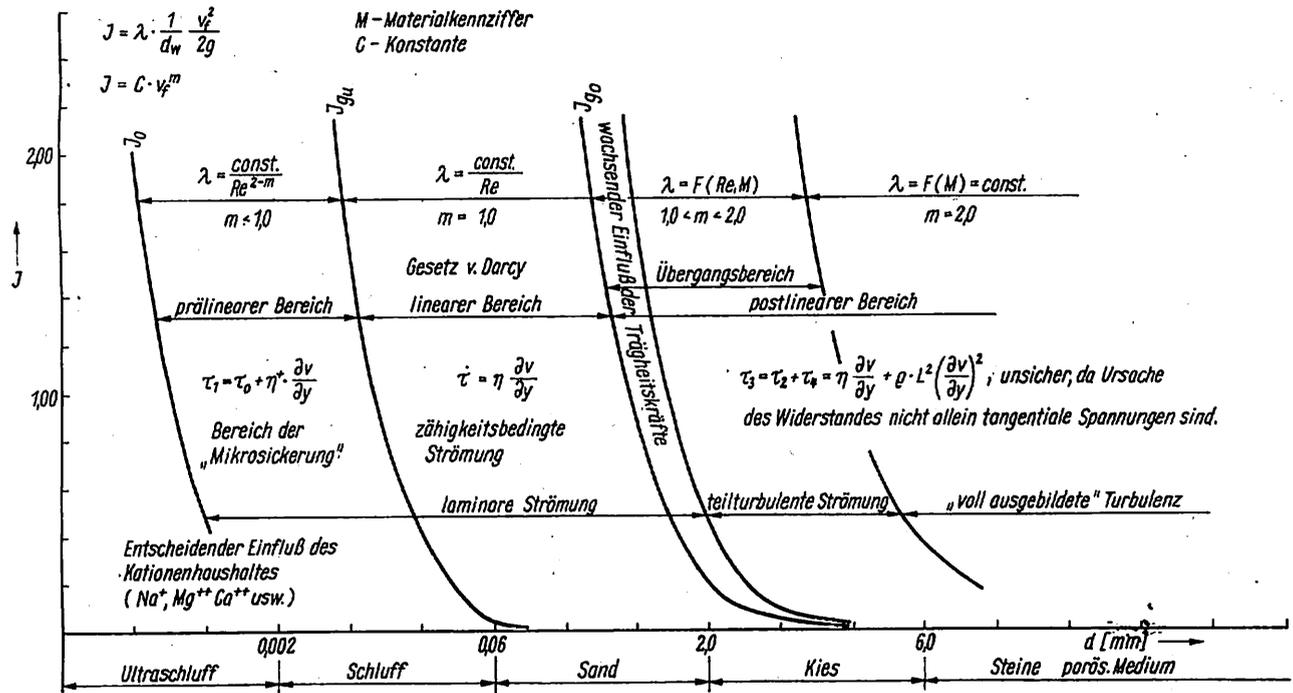


Bild 1 Schema für die Gestaltung der Filtrationsgesetzmäßigkeit

Tafel 1 Re_k -Werte nach bisherigen Untersuchungen

Autor	Material	Korngröße [mm]	Porenanteil	charakt. Länge	Re_k	Bemerkungen
Bakmeteff-Feodoroff [1]	Bleikugeln Sand, Kies	$d_k = 1,0 \dots 12,7$ $d = 0,45 \dots 15,7$	0,38...0,45 0,33...0,41	$d_k \cdot n^{-0,33}$	5 5	
Chardabelles [3]	Sand	$d_w = 0,2 \dots 1,2$	0,38	$d_w \cdot (1 - n)^{-1}$	5	
Isbasch [7]	Kies Steine	$d_k = 5,9$ $d_k = 89,0$	0,40 0,42...0,43	d_k d_k	13 ~200	Vom Verf. umgerechnet [7] benutzte Format von Pawlovskij
Kling [9]	Kugeln	$d_k = 1,4 \dots 6,3$	0,36...0,43	d_k	10	Versuche versch. Autoren
Kroupa [10]	Glaskugeln Sand	$d_k = 1,5 \dots 5,0$ $d_k = 0,4 \dots 2,4$	0,42 —	$d_k \cdot 6(1 - n)^{-1}$	1 1	$d_k = (6 \cdot G/d \cdot \pi \cdot \gamma)^{1/3}$
Lindquist [11]	Messingkugeln	$d_k = 1,05 \dots 4,92$	0,38	d_k	4	
Millioncikov [23]	—	—	—	$k_0^{0,5} n^{-1,0}$	0,20	detail. Angaben fehlen k_0 [cm ²]
Muskat [15]	Sand	—	—	d_m	1	$d_m = (\Sigma n_s \cdot d_s^3 / \Sigma n_s)^{1/3}$
Nagy-Karadi [16]	Sand, Kies	$d_{eff} = 0,15 \dots 12$	—	d_{eff}	5	$d_{eff} = d_{50}$
Pawlovskij [7]	Sand	$d = 0,57 \dots 5,63$	—	$d_w \cdot (0,75 \cdot n + 0,23)^{-1}$	7...9	Versuche von Kröber
Schneeoballi [21]	Kugeln Granit	$d_k = 27$ $d_0 = 37$	0,39 0,47	d_k d_0	5 2	$d_0 = d_k \cdot k_0^{1/2} k_k^{-1/2}$
Seelkacev [23]	—	—	—	$10 \cdot k_0^{0,5} n^{-2,3}$	1...12	detail. Angaben fehlen k_0 [cm ²]
Schaffernak-Dachler [18]	Kies	$d = 2,0 \dots 6,5$	0,37...0,43	d	3...6	klarer linearer Bereich fehlt

die tangentialen Spannungen die Ursachen des Widerstandes dar, sondern nach *Bakhteff* und *Feodoroff* auch die für eine Fließbewegung mit plötzlichen Formänderungen charakteristischen Ablösungserscheinungen.

Die Problematik des Schwellengradienten I_0 und der unteren Gültigkeitsgrenze kann gegenwärtig weder als theoretisch geklärt betrachtet werden, noch verfügt man über exakte Beziehungen, nach denen diese Grenze für praktische Berechnungen abgesteckt werden könnte [16]. Der eindeutige qualitative Nachweis der Existenz eines Schwellengradienten I_0 und einer unteren Gültigkeitsgrenze des linearen Widerstandsgesetzes bei „bindigen“ Böden wird in der neueren Literatur von den verschiedensten Autoren [5], [8], [16], [17], [20] erbracht. Sehr instruktive Versuchsergebnisse teilen *Nagy* und *Karadi* in [16] mit, wo auch über diese Problematik eingehend berichtet wird.

Für Sande und Kiese ist durch die bisherigen Durchflußwiderstands- und vor allem auch Hygroskopizitätsmessungen nachgewiesen, daß nur äußerst schwache liotrophe Erscheinungen auftreten und daß es somit keine hydrodynamische Begründung für die Existenz eines Schwellengradienten gibt. Über die untere Gültigkeitsgrenze bestehen die verschiedensten Auffassungen, die eingehend in [13] beschrieben werden. Abgesehen von den aus Pumpversuchen gewonnenen Ergebnissen (siehe *Schneider* [22]) weisen die bisherigen Untersuchungen die Gültigkeit des Darcyschen Gesetzes bis zu sehr kleinen hydraulischen Gradienten nach. Auch die neuerdings von *Slepicka* [24] angeführte funktionelle Abhängigkeit $I_{gu} = F(k_{t10})$, die nach exakten Messungen an verfestigten Sedimenten (Quader- und Kreidesandsteine) und unter Benutzung der Versuchsergebnisse von *Isbasch* [7] aufgestellt wurde, beweist noch nicht, daß der untere Grenzgradient für Sande und Kiese beachtenswerte Größen erreicht. Die Beziehung von *Slepicka* ist durch Versuchsergebnisse im Sand-Kiesbereich nicht gefestigt, und es läßt sich nachweisen, daß die von *Isbasch* [7] angegebenen Werte der unteren Gültigkeitsgrenze des Darcy-Gesetzes bei Steinschüttungen offensichtlich fehlerhaft sind.

Für die obere Gültigkeitsgrenze, die bei Sanden und Kiesen große Bedeutung besitzt, existieren bereits umfangreiche Ergebnisse. Als Kennziffern werden sowohl Grenzgradienten I_{g0} wie auch kritische Reynolds-Zahlen angegeben. Die durch Ähnlichkeitsbetrachtungen abgeleitete Reynolds-Zahl, die bekanntlich das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften in der Form

$$Re = \frac{\rho \cdot l}{\nu} \quad (3)$$

zum Ausdruck bringt, erscheint besonders geeignet, die Grenze im Übergang von zähigkeits- zu trägheitsbedingter Filterströmung zu erfassen. Die große Schwierigkeit besteht darin, einen geeigneten Ausdruck für die charakteristische Länge zu definieren, der die besonderen Verhältnisse des porösen Mediums erfaßt. Ferner ist die Voraussetzung der geometrischen Ähnlichkeit, worauf bereits *Schaffernak* und *Dachler* [18] hinweisen, bei den verschiedenen porösen Medien offensichtlich nicht gegeben. Die Größenordnungen der in bisherigen Versuchen ermittelten kritischen Reynolds-Zahlen sind in Tafel 1 zusammengefaßt, wobei als Geschwindigkeit die Filtergeschwindigkeit in Gl. (3) eingeführt wurde. Die Tafelwerte lassen erkennen, daß die verschiedenartigsten Ausdrücke für die charakteristische Länge existieren und Re_k die unterschiedlichsten Größen aufweist. Bis auf wenige Ausnahmen (z. B. [7]) wird in der Literatur die Konstanz der Re_k -Werte vertreten. Aus der Literatur geht ferner hervor, daß viele der Untersuchungen im Zusammenhang mit der Ermittlung der Gesetzmäßigkeit des Durchflußwiderstandes erfolgten und nur wenige speziell der Ermittlung der Re_k -Werte dienten.

Die Größenordnung des Grenzgradienten I_{g0} , der überwiegend in Verbindung mit dem Durchlässigkeitsbeiwert k_f

Tafel 2 Ergebnisse bisheriger Untersuchungen über die Ausbildung der Turbulenz $\left(Re = \frac{\rho \cdot d}{\nu} \right)$

Autor	Übergangsgebiet	Beginn d. Turbulenz	Turbulente Strömung	Bemerkungen
<i>Bakhteff-Feodoroff</i>	[1] 3,7...370	—	> 370	$m = 2$ bei 3700 Re umgerechnet
<i>Dachler</i>	[6] —	50	—	Schätzwert n. [11]
<i>Kling</i>	[9] 10...300	—	> 300	$m = 1,82$ bei 300
<i>Nagy-Karadi</i>	[16] 5...200	20	> 200	$m = 1,35$ bei 200
<i>Schaeff</i>	[19] —	—	> 2500	$m = 2,0$ bei 2500
<i>Schneebelli</i>	[21] 5...200	60	> 200	Kugelschüttungen
	2...200	40	> 200	Granit

angegeben wird, bestimmten u. a. *Piefke*, *Zunker* und *Slepicka* [24]. Verschiedene Autoren (z. B. [22]) ermittelten diese Beziehungen auch aus Ergebnissen von Pumpversuchen. Ergebnisse derartiger Untersuchungen können aber beim gegenwärtigen Stand der Brunnentheorie und bei Beachtung der natürlichen Bedingungen (siehe [4]), unter denen sie erzielt werden, nicht die Gültigkeitsgrenzen des Darcyschen Gesetzes beschreiben.

Das Problem der Ausbildung der Turbulenz in einer Sickerströmung ist gegenwärtig ebenso umstritten wie die obere Gültigkeitsgrenze des Darcyschen Gesetzes. Auf die Gegensätzlichkeit des Übergangs vom linearen in den postlinearen Bereich und der Gestaltung der Gesetzmäßigkeit im Übergangsbereich bei der Rohrströmung einerseits und der Filtrationsströmung andererseits wurde bereits hingewiesen. Die in der Literatur angegebenen Re -Zahlen, bei denen die Turbulenz beginnt und bei denen sie „voll ausgebildet“ ist, schwanken beträchtlich. Einige Ergebnisse sind in Tafel 2 aufgeführt. Die Re -Zahlen wurden im allgemeinen aus dem Verlauf der Widerstandskurven abgeleitet. Besondere Bedeutung hat in diesem Zusammenhang die Arbeit erlangt, mit der *Schneebelli* entsprechend der klassischen Methode nach *Reynolds* den Strömungszustand beim Durchfluß von Modokoll durch Steinschüttungen sichtbar machte [21]. *Schneebelli* stellte eindeutig fest, daß bei Erreichen der oberen Gültigkeitsgrenze noch laminarer Fließzustand herrscht, und die teilturbulente Strömung erst bei $Re > Re_k$ einsetzt. Die Unterschiedlichkeit der Angaben über die Größenordnung der „voll ausgebildeten“ Turbulenz (Tafel 2) ist den einzelnen Auffassungen über deren Ausbildung zuzuschreiben. Eingehend ist diese Frage von *Schaeff* analysiert worden [19]. Mit Rücksicht auf die gegenüber der Rohrströmung abweichenden Bedingungen und auf den unterschiedlichen Verlauf der Gesetzmäßigkeit sollte bei der Filtrationsströmung von „voll ausgebildeter“ Turbulenz erst gesprochen werden, wenn der Exponent m den Wert 2,0 erreicht hat.

Systematische Untersuchungen

Art, Umfang und Methodik der durchgeführten Untersuchungen

Zur Klärung der einleitend genannten Aufgabe wurden umfangreiche Widerstandsmessungen beim Durchfluß von Wasser durch die unterschiedlichsten porösen Medien des Sand-Kiesbereiches vorgenommen.

Bei der Auswahl der verwendeten porösen Medien wurde darauf geachtet, daß die Bodenkennziffern, wie Korngröße, Porenanteil, Kornform, Oberflächenbeschaffenheit und Dispersitätsgrad, ausreichende Breite aufwiesen. Untersuchungen erfolgten an:

1. homodispersen Kugelschüttungen im Bereich $d = 0,4 \dots 8,0$ mm,
2. Filtersanden und Kiesen im Bereich $d = 1,0 \dots 15,0$ mm,

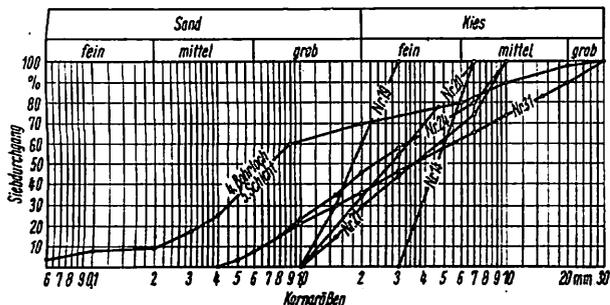


Bild 2 Sande und Kiese mit einheitlichem Siebliniertyp (gleichförmiges Kornverteilungsdiagramm)

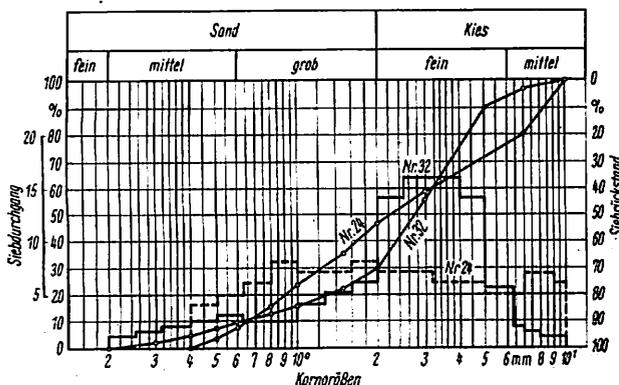


Bild 3 Vergleich des einheitlichen Siebliniertyps mit einem porösen Medium, dessen Kornverteilungsdiagramm ein symmetrisches Maximum aufweist

3. homodispersen scharfkantig gebrochenem Quarzkies,
4. heterodispersen Kugelschüttungen, Natursanden und Kiesen im Bereich $d = 0,2 \dots 30,0$ mm, $U = d_{60}/d_{10} = 1,5 \dots 10,0$.

Damit war es möglich, den Einfluß der verschiedensten physikalisch-mechanischen Bodenkennziffern getrennt zu untersuchen. So gestattete die Einbeziehung der Kugelschüttungen, von hinsichtlich der Kornform geometrisch beherrschbaren Medien auszugehen, während die Verwendung homodisperser Medien ermöglichte, den Einfluß der Korngröße zu untersuchen. Die Bedeutung der Oberflächenrauigkeit konnte an Kugelschüttungen aus verschiedensten Materialien studiert werden. Um die Abhängigkeit der Gültigkeitsgrenzen von der Art der Kornmischung zu ermitteln, wurden die Durchflußwiderstände zunächst an Korngemischen mit gleichförmigen Kornverteilungsdiagrammen (Bezeichnung nach [4]) bestimmt. Der Einfluß der Häufigkeitsverteilung der Korngrößen ergab sich schließlich durch Gegenüberstellung von bei Natursanden und Kiesen typischen Kornverteilungsdiagrammen, die mehr oder minder ausgebildete symmetrische Maxima aufweisen, und denjenigen mit gleichförmiger Häufigkeitsverteilung bei Konstanthaltung der Parameter U und d_w . Beispiele der verwendeten Siebliniertypen enthalten Bild 2 und Bild 3. Um den Einfluß des Porenraumes zu erfassen, sind alle porösen Medien mit mindestens drei Verdichtungsstufen untersucht worden.

Die experimentellen Arbeiten erforderten eine Versuchseinrichtung, die es ermöglichte, die Durchflußwiderstände mit großer Genauigkeit zu ermitteln und hydraulische Gradienten in einem breiten Bereich zu erzeugen. Die Versuchseinrichtung ist eingehend mit der angewendeten Methodik in [12] und [14] beschrieben.

Zur Auswertung der Versuche wurde Gl. (2) herangezogen und die Widerstandsfunktion in der Form

$$\lambda \cdot Re = F(Re) \quad (4)$$

dargestellt [11], [16]. Als charakteristische Länge diente der in die Reynolds-Zahl eingeführte wirksame Korndurchmesser nach Zunker-Kozeny.

Als Beispiel für die zahlreich ermittelten Widerstandskurven sind im Bild 4 die gemessenen Funktionen $\lambda \cdot Re = F(Re)$ eines porösen Mediums dargestellt. Die Gültigkeit des Gesetzes von Darcy erweist sich für die Bereiche, in denen die Widerstandskurve parallel zur Abszisse verläuft, in denen also $\lambda \cdot Re = \text{const.}$ ist.

Zur Ermittlung der kritischen Re -Zahl wurde die Widerstandskurve im Gültigkeitsbereich des Darcyschen Gesetzes durch Mittelwertbildung der Größen $\lambda_1 \cdot Re_1$ festgelegt. Die Werte Re_1 und Re_2 ergaben sich aus dem weiteren Verlauf der Widerstandskurve. Die Zahl Re_1 ist die Zahl, bis zu welcher der parallele Verlauf der Widerstandskurve zur Abszisse repräsentativ für die Versuchswerte ist; und die Zahl Re_2 der Wert, bei dem „merkbar“ Abweichungen der Versuchswerte von der „Darcy-Parallelen“ festzustellen sind. Bei der Festlegung der Punkte Re_1 und Re_2 wurde stets der bei den Versuchen auftretende Fehler beachtet. Die kritische Re -Zahl wurde dann vom Verfasser als Mittel aus den festgelegten Werten in der Form

$$Re_k = \frac{v_{rk} \cdot d_w}{\nu} = \frac{Re_1 + Re_2}{2} \quad (5)$$

bestimmt.

Die Signifikanz der nach dieser Methode festgelegten Re_k -Werte wurde an geeigneten Meßreihen (ausreichende Anzahl Meßwerte zwischen Re_1 und Re_2) zusätzlich überprüft. Die Rechnungen erbrachten in allen Fällen den Nachweis, daß die aus dem Verlauf der Widerstandskurven ermittelten Re_k -Werte statistisch gesichert sind.

Der Grenzgradient I_{g0} ergab sich unter Zugrundelegung der gemessenen k_{r10} -Werte und der Re_k -Zahlen aus folgender Beziehung:

$$I_{g0} = \frac{Re_k \cdot v_{w10}}{k_{r10} \cdot d_w} \quad (6)$$

Um Aussagen über das Verhalten der k_r -Werte bei kleinen hydraulischen Gradienten zu erhalten, wurden im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten bei allen Versuchen auch

Tafel 3 Kritische Reynolds-Zahlen von Filterkiesen bei $n = 0,40$

d [mm]	Re_k	d [mm]	Re_k
1,0 ... 1,5	4,0	3,0 ... 7,0	10,5
1,5 ... 2,0	5,5	7,0 ... 10,0	18,0
2,0 ... 3,0	6,5	10,0 ... 15,0	24,0
3,0 ... 5,0	9,0		

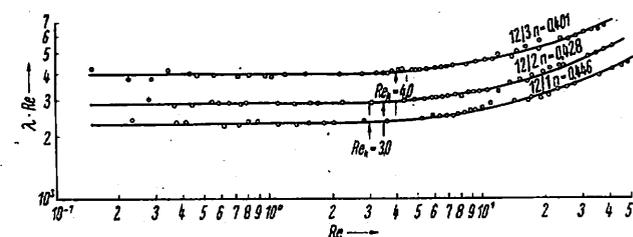


Bild 4 Widerstandskurven des Versuchs Nr. 12 (Filterkies 1,0 ... 1,5 mm)

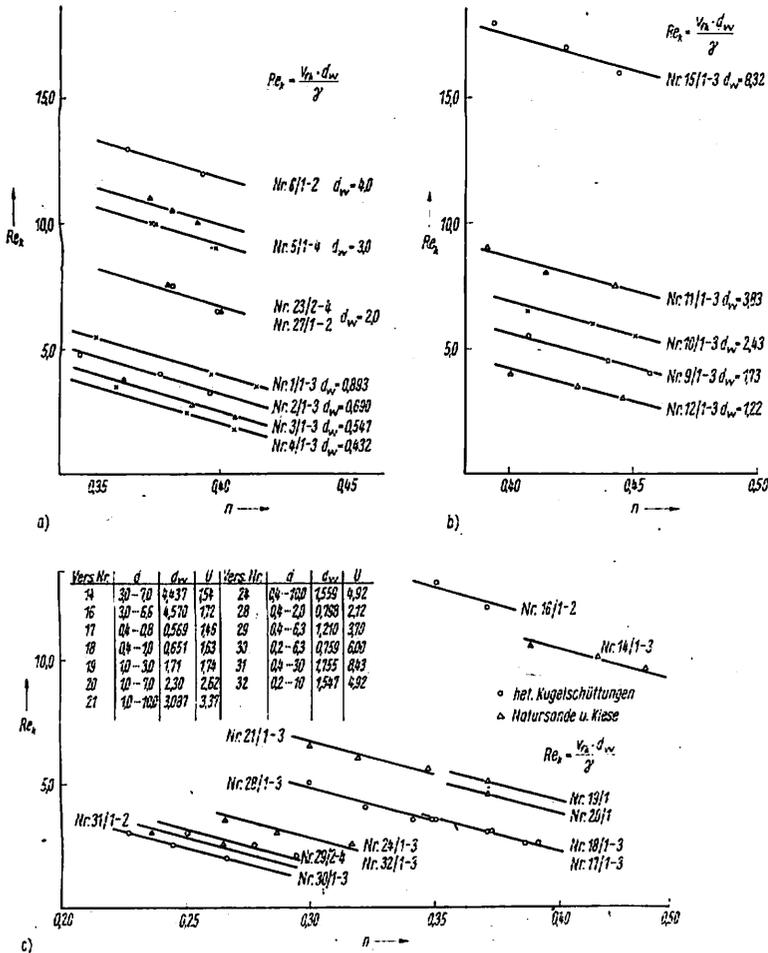


Bild 5 (links)
Kritische Reynolds-Zahlen verschiedener poröser Medien in Abhängigkeit vom Porenanteil
a homodisperse Kugelschüttungen
b Filterkiese
c heterodisperse Kugelschüttungen, Natursande und Kiese

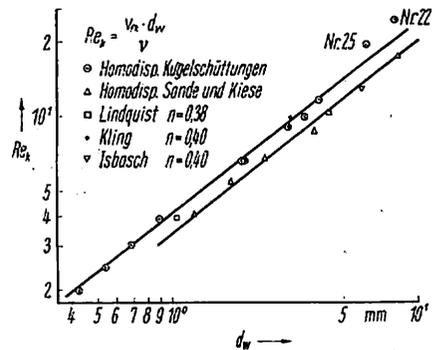


Bild 6
Kritische Reynolds-Zahlen homodisperser Medien in Abhängigkeit von der wirksamen Korngröße bei $n = 0,40$

in diesem Bereich Messungen durchgeführt. Untersucht wurde ferner der Strömungszustand beim Übergang von Zähigkeits- zu trägheitsbedingter Filterströmung an grobkörnigen Kugelschüttungen.

V Versuchsergebnisse

Die gemessenen Widerstandskurven (Bild 4) erbrachten eindeutig den Nachweis der Gültigkeit des Darcyschen Gesetzes bei kleinen Re -Zahlen. Die kritische Reynolds-Zahl, welche den wirksamen Körndurchmesser als charakteristische Länge einschließt, erwies sich nicht als konstante Größe. Die für Re_k erzielten Ergebnisse sind in Bild 5 und 6 dargestellt und lassen darin eindeutige Abhängigkeit von verschiedenen bodenphysikalischen Kennziffern erkennen. In Bild 5 wurden die Re_k -Werte wegen der in dem kleinen Bereich zwischen „primärer“ und dichtester Lagerung nur geringen Anzahl möglicher Meßpunkte vereinfachend durch Geraden ausgeglichen. Einige Werte, die an Filterkiesen bestimmt wurden, sind in Tafel 3 aufgeführt. Die detaillierte Auswertung der Versuche zur kritischen Re -Zahl brachte folgende Ergebnisse:

1. Mit zunehmender Verdichtung wird Re_k größer.
2. Re_k wächst ferner mit zunehmendem Korndurchmesser.
3. Die Abweichungen vom Darcy-Gesetz beginnen um so eher, je mehr die Kornform der einzelnen Körner eines porösen Mediums sich vom Kugelnorm entfernt.
4. Je größer die Ungleichförmigkeit eines Korngemisches ist, um so kleiner wird die kritische Reynoldssche Zahl.
5. Die Art des Korngemisches wird hinsichtlich Re_k genügend genau durch den Ungleichförmigkeitsgrad nach

Hazen in Verbindung mit den übrigen Bodenkennziffern (d_w, n) gekennzeichnet.

6. Der Einfluß der Oberflächenrauigkeit auf die kritische Re -Zahl ist unbedeutend.

Erkennt man an, daß die Abweichungen vom linearen Gesetz im wesentlichen dem wachsenden Einfluß der Trägheitskräfte zuzuschreiben sind, so kann die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Kornform und der Kornmischung gut mit dem Begriff der Tortuosität begründet werden. Hierbei erweist sich der Einfluß der Kornform, wie auch aus Bild 6 ersichtlich, als von der Korngröße unabhängig und annähernd umgekehrt proportional dem Kornformfaktor, wenn vom Kugelnorm ausgegangen wird. Die aus verschiedenen Vorkommen der grundwasserhöflichen Lockersedimente (Haide, Doberlug-Kirchhain und Laußig) gewonnenen Filterkiese zeigten bei den Untersuchungen hinsichtlich der Kornform keine merkbaren Unterschiede, so daß es ausreichend erscheint, nach Kugelschüttungen, Sanden und Kiesen (natürliche Lockersedimente) und scharfkantigen Lockergesteinen (künstliche Bruchprodukte) zu klassifizieren.

Die mit zunehmender Verdichtung steigenden Re_k -Werte deuten darauf hin, daß die Reibungskräfte bei Verkleinerung des Porenraumes stärker zunehmen als die Trägheitskräfte. Diese Erscheinung läßt sich auch damit begründen, daß die bei einer Verdichtung eintretende Verkleinerung des Strömungsquerschnittes (sofern überhaupt von einem solchen gesprochen werden kann) durch d_w nicht zum Ausdruck kommt. Für ein poröses Medium mit unterschiedlicher Lagerungsdichte ergeben sich danach nur konstante Re_k -Werte, sofern die charakteristische Länge durch eine Kenngröße des Hohlraumes ausgedrückt wird.

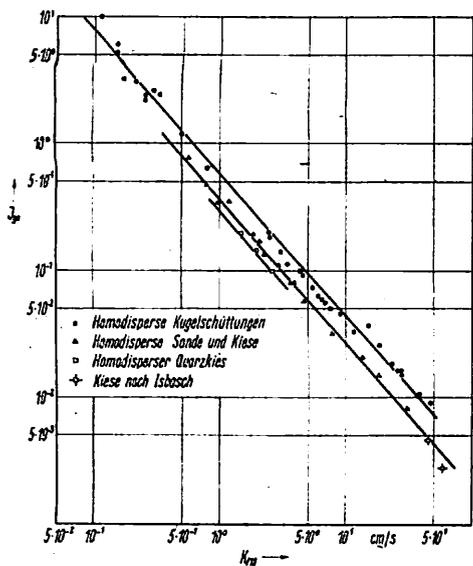


Bild 7 k_f -Wert und Grenzgefälle homodisperser Medien

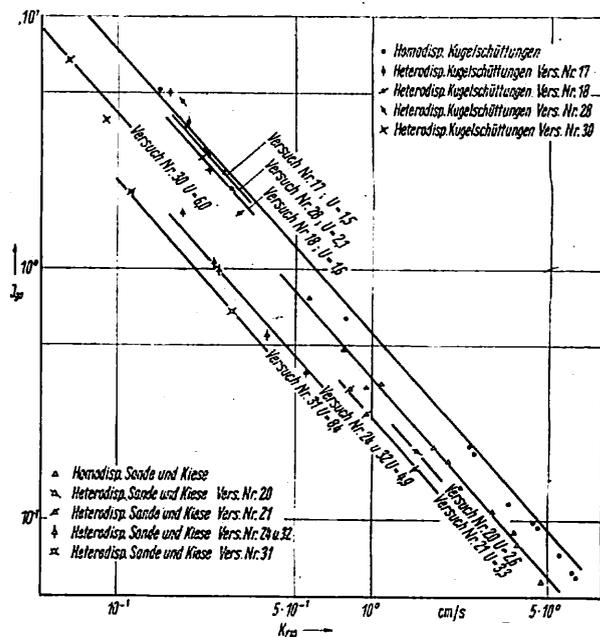


Bild 8 k_f -Wert und Grenzgefälle heterodisperser Medien

Die Abhängigkeit des der Untersuchung zugrunde gelegten Ausdruckes der Re_k -Zahl von der Korngröße erscheint zunächst überraschend. Unter Beachtung von Bild 7 ergibt sich, daß die Größe d_w bei Voraussetzung einer Re_k -Zahl als Konstante nicht linear, sondern mit einem Exponenten $m < 1,0$ auftritt. Vergleicht man bisherige Versuchsergebnisse, insbesondere diejenigen von *Isbasch* [7], mit den hier getroffenen Feststellungen, so erkennt man, daß mit der teilweise bedeutenden Veränderung von d_w sich auch dort ν_{rk} nicht in gleicher Weise ändert. Einer starken Verringerung von d_w steht unter Umständen sogar eine Abnahme von ν_{rk} gegenüber.

Die Größen des Grenzgradienten I_{go} sind in den Bildern 7 und 8 dargestellt, aus denen auch der Trend der Versuchsergebnisse ersichtlich ist. Die Gesetzmäßigkeit ist relativ einheitlich. Unter Beachtung der Streuung der Versuchsergebnisse, die sich aus einer Fehlerrechnung ergab, konnten jedoch deutliche Unterschiede zwischen den einzelnen porösen Medien festgestellt werden. Generell liegen die I_{go} -Werte der homodispersen Kugelschüttungen über den Werten der homodispersen Sande und Kiese und diese wiederum über denjenigen des scharfkantig gebrochenen Materials (Quarzkies). Weiterhin ist ein deutliches Absinken der I_{go} mit zunehmender Ungleichförmigkeit feststellbar. Der k_{f10} -Wert ist im Gegensatz zu bisherigen Untersuchungen demnach nicht der einzige Parameter, der die Größe des Grenzgradienten I_{go} bestimmt.

Eine untere Gültigkeitsgrenze konnte mit der oben beschriebenen Versuchseinrichtung nicht festgestellt werden. Das Darcy-Gesetz erwies sich im Bereich $5 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s} \leq k_{f10} \leq 3 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$ ab Gradienten von $1 \cdot 10^{-3}$ bis $2 \cdot 10^{-3}$, bei denen genaue Messungen noch möglich waren, als gültig.

Trotz größtmöglicher Präzision erbrachten die Untersuchungen des Strömungszustandes keine eindeutig belegbaren qualitativen und quantitativen Ergebnisse. Der Verfasser konnte wie *Schneebelli* [21] beobachten, daß auch beim Durchfluß von Wasser bei Re_k der laminare Strömungszustand vorherrscht und erst bei $Re > Re_k$ eine teilturbulente Strömung einsetzt. Die Turbulenzerscheinungen zeigten sich zuerst in den Porenwinkeln und -zwickeln (Ablösungserscheinungen). Die teilturbulente Strömung begann in grobkörnigen Kugelschüttungen ($d_w = 4,0 \text{ mm}$, $d_w = 5,0 \text{ mm}$) bei $Re \sim 2 \cdot Re_k$.

Empirische Kennziffern

Eine Analyse [14] ergab, daß die Erfassung der in Bild 5 dargestellten Abhängigkeit in erster Näherung durch Geradengleichungen wegen der sich nur in geringen Grenzen einstellenden Lagerungsdichten und aus praktischen Gesichtspunkten nicht zweckmäßig ist. Es erwies sich schließlich folgender Ausdruck für die Kennzeichnung der oberen Gültigkeitsgrenze des Darcy-Gesetzes als geeignet:

$$Re_k = \frac{\nu_{rk} \cdot d_w}{\nu (1-n) c_{GH}} = 1. \quad (7)$$

Hierin ist als charakteristische Länge der von *Kozeny* definierte und von verschiedenen anderen Autoren (siehe [2], [3], [10]) wiederholt benutzte „Hohlraumradius“ in Verbindung mit einem dimensionslosen Faktor c_{GH} (Geohydrofaktor) eingeführt. Der Faktor c_{GH} drückt dabei die festgestellten Abhängigkeiten von den bodenphysikalischen Kennziffern aus. Die Abhängigkeit des „Geohydrofaktors“ von der Kornform, Korngröße und Ungleichförmigkeit wurde ferner in folgender Weise ausgedrückt:

$$c_{GH} = c_f \cdot c_d \cdot c_u. \quad (8)$$

Die Größe c_f ist dabei eine Konstante, deren Größenordnung aus Tafel 4 ersichtlich ist, während die Faktoren c_d und c_u funktionelle Abhängigkeiten zeigten, die im Untersuchungsbereich durch Potenzfunktionen approximiert werden konnten. Durch logarithmische Anamorphose sowie lineare Regression ergaben sich

$$c_d = 7,40 \cdot d_w^{0,80} \quad (9)$$

und

$$c_u = 1,20 \cdot U^{-0,46} \approx \frac{1,20}{\sqrt{U}}. \quad (10)$$

Beide Gleichungen sind in den Grenzen $0,2 \text{ mm} \leq d_w \leq 10,0 \text{ mm}$ und $1,5 \leq U \leq 10$ gültig. Wesentlich ist ferner, daß die Größe 7,40 mit der Dimension $[\text{mm}^{-0,8}]$ behaftet ist und für $1,0 \leq U \leq 1,5$ den Wert 1,0 aufweist.

Die Abhängigkeit des Grenzgradienten I_{go} von den Bodenkennziffern kann ferner wie folgt geschrieben werden:

$$I_{go} = F(f, n, d_w, U) = F(B_k). \quad (11)$$

Dabei ist es nicht angängig, $F(B_k)$ durch $F(k_0)$ zu ersetzen, auch wenn k_0 durch die gleichen Parameter wie B_k beschrieben wird, denn der funktionellen Abhängigkeit des k_0 -Wertes von den Bodenkennziffern liegen die Bedingungen einer zähigkeitsbedingten Strömung zugrunde. Die Ursachen des Abweichens vom linearen Gesetz sind, wie bereits oben beschrieben, anderer Natur. Theoretisch betrachtet kann in Gl. (11) nur ein Parameter durch k_0 eliminiert werden. Die Ergebnisse zeigen jedoch, daß der Einfluß des Porenanteiles in Gl. (11) bei einem porösen Medium sich nur in den Grenzen $n_0 \leq n \leq n_d$ auswirkt und offenbar die funktionellen Anteile von n , die in k_0 enthalten sind, den Einfluß des Porenanteiles auf I_{go} bereits hinreichend berücksichtigen. Beim Durchfluß von Wasser ist $k_0 = \text{konst.} \cdot k_{f10}$, und man erhält schließlich

$$I_{go} = c_w \cdot F(k_{f10}, f, U). \quad (12)$$

Wie aus Bild 7 ersichtlich, ergeben sich funktionelle Beziehungen in der Form $I_{go} = A \cdot k_{f10}^m$ mit einem konstanten Exponenten m . Der Einfluß der Kornform zeigt sich danach wiederum als konstanter Faktor. Die Gesetzmäßigkeit des Einflusses von U ist nicht leicht festzustellen, da im Bereich $5 \cdot 10^{-1} \text{ cm/s} \leq k_{f10} \leq 5 \cdot 10^1 \text{ cm/s}$ mit $U > 5$ (Grobkies, Steinschüttungen) systematische Versuche noch fehlen. Setzt man nach den bisherigen Versuchsergebnissen auch dafür $m = \text{const.}$ voraus, so kann unter Beachtung der Ergebnisse einer durchgeführten Ausgleichsrechnung geschrieben werden

$$I_{go} = \frac{A}{k_{f10}^{0,10}}, \quad (13)$$

mit

$$A = 0,56 a_t \cdot a_u. \quad (14)$$

Die Größen für a_t können der Tafel 4 entnommen werden, und a_u entspricht c_u nach Gl. (10), wie aus den Versuchsergebnissen und einer in [14] unter Berücksichtigung der bekannten Beziehung $k_{f10} = C \cdot d_w^2$ durchgeführten analytischen Berechnung hervorgeht. Einige Werte für A sind ferner in Tafel 5 zusammengestellt.

Die angegebenen Beziehungen besitzen Gültigkeit im Bereich $5 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s} \leq k_{f10} \leq 5 \cdot 10^1 \text{ cm/s}$ und $U \leq 10$.

Der Zusammenhang der Kennziffern Re_k und I_{go} ist weiterhin durch Gl. (6) gegeben, so daß ferner gilt:

$$Re_k = \frac{A \cdot d_w}{k_{f10}^{0,10} \cdot v_{w10}} = \frac{v_{tk} \cdot d_w}{v}. \quad (15)$$

Die untere Gültigkeitsgrenze liegt für Sande und Kiese offenbar bei außerordentlich kleinen Gradienten. Für praktische Untersuchungen kann deshalb $I_{gu} = 0$ angenommen werden.

WaA 3189

Literatur

- [1] *Bakhtmeteff, B. A., und Fedoroff, N. V.*: Flow through Granular Media. Proc. V. Int. Congr. for applied Mechanics. Harvard University, Cambridge 1938.
- [2] *Barth, W.*: Der Druckverlust bei der Durchströmung von Füllkörpersäulen und Schüttgut mit und ohne Berieselung. Chemie - Ingenieur - Technik, 23. Jg. (1951) H. 12.
- [3] *Chardabellas, P. E.*: Durchflußwiderstände im Sand und ihre Abhängigkeit von Flüssigkeits- und Bodenkennziffern. Diss. TU Berlin 1940 oder Mitteilung der Preuß. Versuchsanstalt für Wasser- und Schiffbau, Berlin 1940
- [4] *Chardabellas, P. E., und Tiemer, K.*: Normung der K -Wert Feldbestimmung durch Standardisierung der Korngrößenverteilungsdiagramme grundwasserhöffiger Lockergesteine. Mitt. des Instituts für Wasserwirtschaft, H. 20, Berlin 1964.
- [5] *Curakov*: Filtracija vodi v glinistich gruntach. Mitteilung Nr. 24 des Lehrstuhles für Wasserbau Misi, Moskau 1958.

Tafel 4 c_f und a_f -Werte

Poröses Medium	c_f	a_f
Kugelschüttung	1,0	1,0
Sande und Kiese	0,77	0,65
Scharfkantig gebrochenes Material	0,70	0,53

Tafel 5 A -Werte

U	Kugelschüttungen	Sande und Kiese	Scharfkantig gebrochenes Material
1,0	0,56	0,37	0,30
2,0	0,48	0,32	0,26
3,0	0,40	0,26	0,22
4,0	0,36	0,23	0,19
5,0	0,32	0,21	0,17
6,0	0,30	0,19	0,16
7,0	0,27	0,18	0,15
8,0	0,26	0,17	0,14
9,0	0,24	0,16	0,13
10,0	0,23	0,15	0,12

- [6] *Dachler*: Grundwasserströmung. Springer-Verlag 1936.
- [7] *Isbasch, S. W.*: Über Sickerung in grobkörnigem Material. Mitteilungen des wissenschaftlichen Instituts für Hydrotechnik Bd. 1 (1931), Moskau.
- [8] *Juhasz, J.*: Untersuchung der Sickererscheinungen. Hidrológiai Közönlöny 1958, H. 1.
- [9] *Kling, G.*: Druckverlust in Kugelschüttungen. VDI, 84. Jg. (1940), H. 5.
- [10] *Kroupa, P.*: Hydraulika filtracního lože. Voda, Praha 1956, H. 3, S. 77 bis 80.
- [11] *Lindquist, E.*: On the Flow of water through porous Soil. Premier Congres des grands Barrages, Communications Stockholm 1933.
- [12] *Ludewig, M.*: Erfahrungen bei Durchlässigkeitsversuchen von Sanden. Wiss. Zeitschrift der Hochschule für Bauwesen, Leipzig 1965, H. 4.
- [13] *Ludewig, M.*: Die Ermittlung der Anwendungsgrenzen des Darcyschen Gesetzes in Abhängigkeit von den Bodenkennwerten und den Strömungsgeschwindigkeiten. F-Bericht (Lit.-Studie) Plan Nr. 2165 02/3 06/3 Wo.
- [14] *Ludewig, M.*: Ermittlung der Kennziffer beim Übergang von zähigkeits- zu trägheitsbedingter Filterströmung in Abhängigkeit von den Bodenkennwerten und Strömungsgeschwindigkeiten. F-Bericht 4516 02/5 - 01/4.
- [15] *Muskat, M.*: Flow of homogenous fluids through porous media. New York, Toronto, London 1937, Michigan, USA, 1940.
- [16] *Nagy und Karadi*: Untersuchung der Gültigkeit des Darcyschen Gesetzes. Österr. Wasserwirtschaft 1961, H. 12.
- [17] *Roza, S. A.*: Rezultati eksperimentalnovo izucenija nacalnovo filtracionovo gradienta v plotnich glinach. VNJJGS Mitteilungen Nr. 4. Gosstroichizdat, Leningrad Moskau 1954.
- [18] *Schaffernak und Dachler*: Das Widerstandsgesetz für die Wasserströmung durch Kies. Die Wasserwirtschaft 1934, H. 15.
- [19] *Schaef, H. J.*: Betrachtungen zu durch- und überströmten Steinschüttungen. Mitteilungen des Instituts für Wasserwirtschaft, Berlin 1964, H. 18.
- [20] *Schmid, W. E.*: The Permeability of Soils and the Concept of a Stationary Boundary-Layer. Proceed. ASTM - 1226 (1957).
- [21] *Schneebelli, G.*: Versuche über die Grenze der Gültigkeit des Darcy-Gesetzes und das Auftreten der Turbulenz bei einem Sickerdurchfluß. La Houille Blanche, 10. Jg. (1955) H. 2.
- [22] *Schneider, Truelsen und Thiele*: Die Wassererschließung. Vulkan-Verlag, Essen 1952.
- [23] *Seelkacev, V. N., und Lapuk, B. B.*: Podzemnaja gidraulika. Moskau 1949.
- [24] *Slepicha*: Sickergesetze. Mitteilungen des Wasserwirtschaftlichen Forschungsinstitutes, Prag-Podbaba 1961.