2.4. Hydrodynamik

2.4.1. Grundbegriffe der Hydrodynamik

Die Hydrodynamik behandelt die Bewegung der Flüssigkeiten.

In der Hydrostatik wurde ausgegangen von der Formel:

$$\text{Volumen} \cdot \text{Wichte} = \text{Gewicht} \left[\frac{m^3 \cdot t}{m^3} = t\right]$$

Bei der Bewegung muß außerdem die Zeit mit der Einheit Sekunde [s] berücksichtigt werden:

$$\frac{\text{Volumen} \cdot \text{Wichte}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Zeit}} \left[\frac{m^3 \cdot t}{m^3 \cdot s} = \frac{t}{s}\right].$$

In der technischen Hydraulik wird die Wichte des Wassers fast immer $\gamma = 1 \left[\frac{t}{m^3}\right]$ gesetzt. Während in der Hydrostatik die *ruhende* Wassermenge die spezielle Einheit m^3 hat, ist in der *Hydraulik* die Einheit $\frac{m^3}{s}$, üblich, die das Maß für den *Abfluß* (Q) angibt.

Der Abfluß (Q), auch Durchfluß, ist die Wassermenge, die in einer Zeiteinheit einen Abflußquerschnitt durchfließt.

Unter F $[m^2]$ wird der vom Abfluß Q erfüllte Abflußquerschnitt (auch Durchflußquerschnitt) verstanden. Mit Geschwindigkeit wird der Weg in der Zeiteinheit $\frac{Q}{F} \left[\frac{m^3}{s \cdot m^2} = \frac{m}{s}\right]$ bezeichnet, im offenen Abflußquerschnitt mit dem Formelzeichen v, in geschlossenen Querschnitten mit c benannt.
Nach dem Fallgesetz müßte die *Fließgeschwindigkeit* fortlaufend beschleunigt werden. Der Beschleunigungskraft tritt aber in den Durchflußquerschnitten eine Kraft, die *Reibungskraft*, entgegen. Die Reibungskraft ist proportional der reibenden Fläche wie

bei festen Körpern, proportional dem Quadrat der Fließgeschwindigkeit und proportional einem Reibungsbeiwert (c)$\left[\frac{t \cdot s^2}{m^4}\right]$.
Die reibende Fläche der festen Umfassung wird mit benetztem Umfang U [m^2] bezeichnet.

Unter Gefälle ist der lotrechte Höhenunterschied in m zwischen zwei Punkten (Wasserspiegel oder Sohle), bezogen auf deren horizontale Projektion und ihren Abstand, zu verstehen.

Das Gefälle hat auf die Einheit 1 m bezogen das Formelzeichen I.

Das Verhältnis von Abflußquerschnitt zu benetztem Umfang ist der hydraulische Radius (R) $R = \frac{F}{U}$ [m].

Dem hydraulischen Radius kommt in den Fließformeln große Bedeutung zu. R kann bei gleicher Querschnittsgröße verschiedene Werte haben. Der *günstigste* Querschnitt ist der mit den *geringsten* Reibungsverlusten.

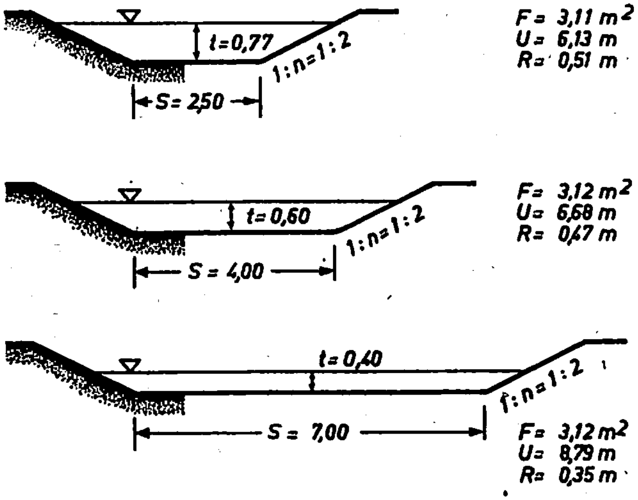


Abb. 9
Einfluß des Querschnitts auf R

S = Sohlbreite
t = Wassertiefe
F = Abflußquerschnitt
U = benetzter Umfang
R = hydraulischer Radius

2.4.2. Strömungsverhältnisse

Bei der Berechnung der Strömungsverhältnisse ist zu unterscheiden zwischen *offenen Gerinnen*, *Freispiegelleitungen* (geschlossenen) und *Druckrohrleitungen*. Die Formelberechnungen werden im Abschnitt 2.5.3., S. 77 behandelt. Beim Strömen bzw. Fließen werden weiter unterschieden:

- stationäres (zeitlich gleichbleibendes) Strömen,
- instationäres (zeitlich veränderliches) Strömen,
- laminares Strömen,
- turbulentes Strömen.

Bei *stationärem Fließen* bleibt im betrachteten Abflußquerschnitt F der Durchfluß Q im Zeitabschnitt gleich $(\frac{Q}{F} = v)$; das Fließbild ändert sich nicht. Wechselt der Fließzustand von F zu F_1 und von Zeit zu Zeit, wie z. B. bei ansteigendem Hochwassser oder plötzlichem Ablassen von Stauflächen, dann ist der Fließzustand *instationär.*

Die Fließbewegung kann auch *verzögert* oder *beschleunigt* sein. Ist der Abfluß Q oberhalb einer Stauanlage konstant, dann ist infolge des Rückstaues $F_u > F_o$; da $\frac{Q}{F_u} = \frac{Q}{F_o}$ bleibt, wird $v_u < v_o$. Bei beschleunigter Bewegung ist es umgekehrt.

In der Strömungslehre wird von *Strombahnen* und *Stromlinien* ausgegangen, die bei stationärem Fließen identisch sind. Auch wird unterschieden zwischen:

- eindimensionaler Bewegung,
- zweidimensionaler Bewegung der Flüssigkeitsteilchen.

Das Problem ist einfacher zu verstehen, wenn von der Annahme ausgegangen wird, daß die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen in parallelen Ebenen vor sich geht. Auf diesem Bewegungszustand baut das Hauptgebiet der technischen Hydraulik auf.

Um eine Flüssigkeit, Teile derselben oder einen Körper in der Flüssigkeit zu bewegen, bedarf es einer *Kraft,* die die Widerstände der Reibungskräfte überwindet. Die durch die Bewegung erzeugte *kinetische Energie* muß nach dem Energiesatz „Kraft mal Weg" erzeugt werden. Sie muß größer sein als die Widerstandskräfte, um die Fließbewegung aufrechtzuerhalten.

> Die Größe des Widerstandes gegen feste Umfassungskörper hängt von der Dichte der Flüssigkeit, in gewissen Bereichen von der Fließgeschwindigkeit und auch von der Querschnittsfläche bzw. deren Formgestaltung ab.

Diese Tatsache läßt sich an bewegten Körpern beweisen, die in Flüssigkeiten eingetaucht sind. Die Widerstandskraft wird dabei nach der Formel (nach Newton) berechnet: $P_R = \frac{\xi \cdot \gamma}{2} \cdot v^2 \cdot F$. Darin ist F der Querschnitt des eingetauchten Körpers, v die Geschwindigkeit des Körpers und ξ der sogenannte Widerstandsbeiwert, eine empirisch ermittelte Konstante.

Der verschiedene innere Widerstand von Flüssigkeiten, erzeugt durch die innere Reibung, ist nicht der verschiedenen Dichte, sondern der Zähigkeit zuzuschreiben, so daß vom *Zähigkeitswiderstand* gesprochen wird. Dieser Teil des Widerstandes, der in idealen Flüssigkeiten nicht auftritt und früher in der angewandten (technischen) Hydraulik auch vernachlässigt wurde, findet heute in der Rohrhydraulik große Beachtung. Die Erfahrung hat auch gelehrt, daß

> der Zähigkeitswiderstand umso mehr der Geschwindigkeit proportional wird, je kleiner die Geschwindigkeit ist.

In einem Geschwindigkeitsbereich, der dem linearen Geschwindigkeitsgesetz des Widerstandes entspricht, ist nach Beobachtungen der Widerstand dem Zähigkeitsmaß η der Flüssigkeit proportional.

2.4.2.1. Laminarströmung

In der Strömungslehre wird von Schicht- oder Laminarströmung (lámina = Blatt) gesprochen, wenn die einzelnen infinitesimal (ins unendlich kleine gehenden) dünnen Flüssigkeitsschichten neben- und übereinander gleiten, ohne sich weder zu durchsetzen noch zu vermischen.

Dabei können die Geschwindigkeiten gleich oder verschieden groß sein. Ist die Geschwindigkeit der Gleitschichten untereinander verschieden, dann wirken sie durch die schon erwähnten inneren Reibungskräfte aufeinander ein. Die *Reibungskraft* läuft in diesem Fall parallel der Geschwindigkeit und wirkt auf die Relativbewegung der Schichten hemmend ein. Abgeleitet von dem Newtonschen Gesetz kann die Größe (η) in ihrer Wirkung senkrecht zur Strömung bestimmt werden. Das bedeutet, daß die Reibungskraft nicht allein von der Geschwindigkeit v, sondern auch von dem *Geschwindigkeitsgefälle* $\frac{d_v}{d_n}$, das senkrecht zur Strömung herrscht, abhängt. Dabei wird nur dann von einer Reibung gesprochen, wenn sich die Schichten relativ, d. h. zu einem als ruhend bestehenden Bezugssystem (Rohrwandungen) bewegen.

Der Proportionalitätsfaktor η (Zähigkeit) ist der Koeffizient der inneren Reibung und hat die Einheit $1\ \mathrm{kg\ m^{-1} \cdot s^{-1}}$; häufig wird auch der zehnte Teil dieser Einheit (Poise) benutzt $= \frac{1}{10} \cdot \mathrm{kg\ m^{-1} \cdot s^{-1}}$.

Bei *langsamer* Strömung durch ein Rohr fließt das Wasser mit *konstanter* Geschwindigkeit. Daraus kann geschlossen werden, daß sich Druckkraft (Schwerkraft) und Reibungskraft ausgleichen. Da die äußere Flüssigkeitsschicht aber an der Rohrwand haftet (Adhäsion), wird diese Anziehung mit der zunehmenden Entfernung von der Wand geringer und damit die Geschwindigkeit der entfernteren Bahnlinien größer. Bei einem runden Rohr ergeben sich dabei offensichtlich zylindrische Bewegungsschichten, und zwar koaxiale zum Rohr, woraus sich darstellerisch ein parabolisches Fließprofil ergibt (siehe Abb. 10a, S. 73).

2.4.2.2. Turbulenzströmung

Eine Turbulenzströmung ist gegeben, wenn in einer in einem Rohr bewegten Flüssigkeit Wirbel entstehen und die Flüssigkeitsbahnen dadurch nicht nur verformt werden, sondern sich auch drehen.

Um den Wirbelraum schließt sich in der Regel außen ein Bereich mit einer Zirkulationsströmung an. In diesem Bereich der Zirkulationsströmung nimmt die *Lineargeschwindigkeit* proportional dem Achsabstand ab. Daraus ergibt sich, daß der Ursprung der Wirbel vornehmlich dort liegt, wo die Reibungskräfte in der Flüssigkeit sehr groß sind, was vor allem in der dünnen Grenzschicht an den Rohrwandungen der Fall ist. (Obgleich bei der Laminarströmung die Flüssigkeitsschichten zwar auch mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbeigleiten, ist diese Strömungsart als wirbelfrei zu bezeichnen.)

Bei der *turbulenten* Strömung liegen die Stromlinien nicht glatt nebeneinander, sondern sie sind unregelmäßig und laufen ineinander über, woraus folgt, daß die beiden Strömungsarten verschiedenen Gesetzen folgen. Während die Geschwindigkeit v bei der laminaren Strömung in den koaxialen Schichten ohne Fädenvermischung stetig zunimmt, entwickelt sich bei der *Turbulenz* eine turbulente (wirbelnde) Kernströmung.

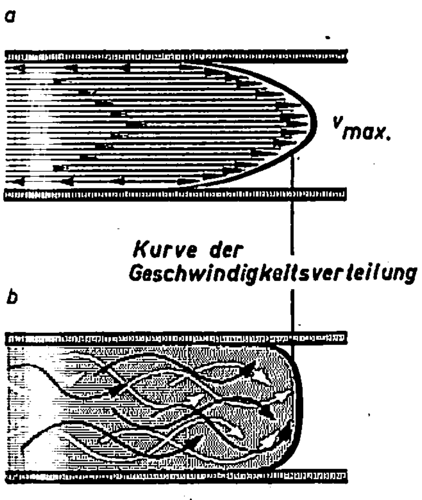


Abb. 10
Darstellung der laminaren Strömung (a) und der turbulenten Strömung (b)

2.4.3. Die Reynoldsche Zahl

Der Widerstandsbeiwert ξ in der Newtonschen Widerstandsgleichung kennzeichnet insbesondere die Form des Körpers und die Strömungseigenschaften der Flüssigkeit.

Dieser Wert ist eine dimensionslose Größe. ξ ist für zwei verschiedene Flüssigkeiten gleich, wenn sie unter sonst gleichen Umständen auf dieselbe kinematische Zähigkeit (Quotient von η und ρ) bezogen sind. Der Wert ξ basiert mithin auf dem Ähnlichkeitsgesetz für Flüssigkeitsströmungen. Reynolds entdeckte, daß ξ unveränderlich bleibt, wenn die dimensionslose Größe $Re = \frac{r \cdot v}{\nu}$ unveränderlich gehalten wird (r = Rohrradius, v = Geschwindigkeit, ν = kinematische Zähigkeit).
Der Beiwert ξ hängt also von der dimensionslosen Größe $Re = \frac{\gamma \cdot l \cdot v}{\eta}$ ab, wobei l eine charakteristische Länge ist und gleich 1 gesetzt werden kann (Re ist die Reynoldsche Zahl).

Ist die Reibung im Verhältnis zur kinetischen Energie groß, dann ist die Reynoldsche Zahl klein und die Strömung laminar. Bei geringer Reibung wird die Reynoldsche Zahl groß, und die Strömung tritt in den turbulenten Bereich ein.

Die kritische Geschwindigkeit (v_k) liegt

in *offenen Gerinnen* bei $Re_k = \frac{v \cdot R}{\nu} = 580$,

in *geschlossenen Druckrohrleitungen* bei $Re_k = \frac{v \cdot D}{\nu} = 2300$ und

wird für *Freispiegelrohrleitungen* mit $Re_k = \frac{v \cdot D}{\nu} = 1200$ angesetzt.

2.4.4. Kontinuitäts- und Bernoullische Gleichung

Da bei *inkompressiblen* Flüssigkeiten die Volumenveränderung durch Druck zu vernachlässigen ist, folgt, daß in einem Rohrsystem mit verschiedenen Querschnitten aber gleichbleibender geodätischer Höhe lediglich *verschiedene* Geschwindigkeiten bei gleichen Flüssigkeitsdrücken bestimmend sind.
Tritt in den Rohrquerschnitt (Abb. 11) F_1 eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v_1 ein, so muß das ausfließende Q aus F_2 mal v_2 demjenigen des einfließenden gleich sein. Es gilt die Kontinuitätsgleichung $F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2$ oder anders ausgedrückt

$$v = \frac{Q}{F} \left[\frac{m^3}{s \cdot m^2} = \frac{m}{s}\right].$$

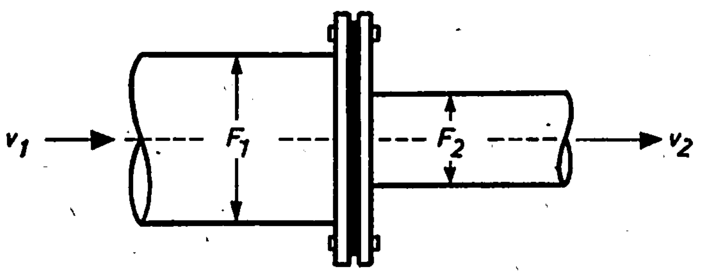


Abb. 11 Darstellung der Kontinuitätsgleichung — da $Q = F \cdot v$ ist, ergibt sich, daß v_2 größer ist als v_1

In einem geschlossenen Kreislauf verhalten sich die Strömungsgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Querschnitte.

Fließt unter diesen Bedingungen ein Flüssigkeitsstrom durch ein Rohrsystem, dann heißt die Bewegung *stationäre Strömung*. Ihre Kennzeichnung besteht darin, daß ihr Bewegungszustand in jedem Punkt des bewegten Systems stets derselbe ist.
Für ideale (reibungslose) Flüssigkeiten gelten:

- Kontinuitätsgleichung Q (Durchfluß) $= F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2$,
- Bernoullische Gleichung $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z =$ konstant (z = Höhe über der Nullebene).

Die *Bernoullische Gleichung* hat in dieser Form Gültigkeit für *ideale* Flüssigkeiten, wobei stationäres Fließen und flüssigkeitserfüllter Raum (Kontinuum) vorausgesetzt werden. Es gilt der Satz:

Bei der Bewegung einer idealen Flüssigkeit ist die Summe aus Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, Druckhöhe $\frac{p}{\gamma}$ und geodätischer Höhe z konstant.

Das Gesetz der Fallhöhe lautet (freier Fall $v = \sqrt{2gh}$).

Wiederholt sei hier nochmals die Formelzeichenbedeutung:

Q (Durchfluß) $\left[\frac{m^3}{s} \text{ auch } m^3/s\right]$, v (Geschwindigkeit) $\left[\frac{m}{s} \text{ auch } m/s\right]$, g (Erdbeschleunigung) $\left[\frac{m}{s^2}\right]$, p (Druck) $\left[\frac{t}{m^2}\right]$, γ (Wichte) $\left[\frac{t}{m^3}\right]$, t (Zeit) [s], z, auch h_g (geodätische Höhe) [m], s (Weg) [m], h, auch $h_{ges.}$ (Fallhöhe) [m].

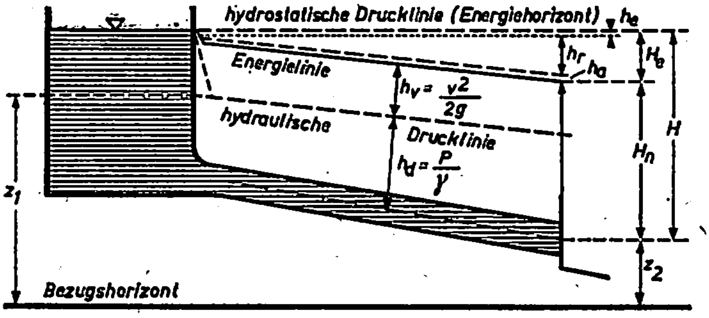
In der Bernoullischen Gleichung für die natürlich ankommende Flüssigkeit müssen die *Reibungsverluste* im bewegten System berücksichtigt werden, d. h. die Energieumwandlung, die praktisch als Verlust oder Aufzehrung verlorengeht.

Dieser Verlust (Reibungsverlust) h_r [m] ergibt, daß außer $h_v = \frac{v^2}{2\,g}$ noch h_r mit in die ursprüngliche Gleichung aufzunehmen ist. Die h_r-Werte in einem verzweigten Rohrsystem setzen sich aus den Rohrreibungsverlusten (diese machen den Hauptteil aus) und aus einer Summe von Reibungswiderständen, wie Eintritts-, Krümmungs-, Austritts-, Schieberverlusten usw., zusammen. Diese Summe ist als *Gesamtdruckhöhenverlust* anzusetzen. Die Bernoullische Gleichung für die *wirkliche* Flüssigkeit lautet daher:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2\,g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2\,g} + H_E = H.$$

In dem energetischen Darstellungsbild kann nur davon ausgegangen werden, daß nach dem Energiesatz nie Energie verlorengehen, sondern nur umgewandelt werden kann.
Die zur Überwindung der Reibungswiderstände aufzuwendende Arbeit ist jedoch als solche umgewandelt und praktisch verlorengegangen. Ausgehend vom Energiehorizont (hier auch als hydrostatische Drucklinie bezeichnet), sind die Gesamtdruckhöhenverluste H_E vom Energiehorizont abzusetzen, woraus sich die *Energielinie* (bei stationärer Bewegung = dynamische Drucklinie) ergibt. Der Energielinie schließt sich die zur

Abb. 12
Darstellung der Bernoullischen Gleichung



Fließbewegung erforderliche $h_v = \frac{v^2}{2g}$ (Geschwindigkeitshöhe) an. In der Darstellung ist darunter die parallel zur Rohrachse mit dem Abstand h_v verlaufende hydraulische Drucklinie angegeben.