DK 531.7:001.4 DDR-Standard April 1963

Deutsche Demokratische Republik

Meßtechnik

Grundbegriffe

TGL 0-1319

Gruppe 034

Verbindlich ab 1. 10. 1963

Inhalt

1. Geltungsbereich

1.1. Dieser Standard gilt für Meßgeräte, bei denen eine Marke des Gerätes (z. B. eine bestimmte Stelle eines körperlichen oder eines Licht-Zeigers, ein Noniusstrich, eine Kante, der Meniskus einer Flüssigkeitssäule, die bezeichnete Stelle eines Schaulochs) auf eine Stelle der Skale (Teilung) des Gerätes eingestellt wird oder sich einstellt. Dabei ist es gleichgültig, ob sich die Marke oder die Skale bewegt. Das Einstellen der Marke kann stetig oder sprungweise geschehen.

1.2. Zu den im Abschnitt 1.1. genannten (anzeigenden) Meßgeräten gehören auch die registrierenden (z. B. Schreiber) und die integrierenden oder zählenden (Zähler).

1.3. Die Festlegungen dieses Standards gelten auch für Meßanordnungen, die aus mehreren Meßgeräten und Zusatzeinrichtungen zusammengesetzt sind und ein Ganzes bilden.
Beispiele: Mehrkomponentenwaage im Windkanal, Koordinatenmeßgerät.

1.4. Auf Meßgeräte, für die die Kennzeichnung nach Abschnitt 1.1. nicht zutrifft, sind die Festlegungen dieses Standards sinngemäß zu übertragen.

1.5. Maßverkörperungen („Maße"), die bestimmte einzelne Werte einer Meßgröße, z. B. eine Einheit, Vielfache oder Teile einer Einheit verkörpern (z. B. Endmaße, Meßkolben, Wägestücke, Widerstandsnormale), haben keine während der Messung gegeneinander beweglichen Teile (siehe auch Anmerkungen).

Grundbegriffe für die Anwendung von Meßgeräten

2. Meßgröße, Meßgegenstand, Anzeige, Meßwerte, Meßergebnis

2.1. Die Meßgröße ist die zu messende physikalische Größe (z. B. Länge, Kraft, Arbeit, Temperatur, elektrischer Widerstand, Leistungsfaktor) (siehe auch Anmerkungen).

2.2. Ist die Meßgröße eine meßbare Eigenschaft eines Körpers (auch einer Probemenge), so heißt dieser Körper Meßgegenstand (Meßobjekt, Prüfling, Prüfgut, Probekörper, Probe).

2.3. Die Anzeige ist der an einer Skale abgelesene Stand der Marke. Die Anzeige kann als Zahlenwert oder je nach der Beschriftung in Einheiten der Meßgröße, in Skalenteilen, in Längeneinheiten oder in Ziffernschritten angegeben werden. Es gibt Meßgeräte mit mehreren Skalen, die längs des Weges der Marke nebeneinander oder hintereinander liegen können (siehe auch Anmerkungen zu 3.1., 3.6. und 3.7.).

2.4. Der Meßwert ist der aus der abgelesenen Anzeige eines Meßgerätes ermittelte Wert; er wird als Produkt aus Zahlenwert und Einheit der Meßgröße (z. B. 3 m; 20,0 °C; 6,5 Ω) angegeben (siehe auch Anmerkungen).

2.5. Ein Meßwert kann bereits das Meßergebnis darstellen; häufig wird dieses jedoch aus einem oder mehreren Meßwerten gleicher oder verschiedener Größenart nach einer mathematischen Beziehung ermittelt. In diesem Fall muß zwischen Meßwert und Meßergebnis unterschieden werden (siehe auch Anmerkungen).

3. Skalenart, Skalenlänge, Teilstrichabstand, Skalenteil, Ziffernschritt, Skalenwert, Skalenkonstante

3.1. Skalenarten

3.1.1. Eine Strichskale ist die Aufeinanderfolge einer größeren Anzahl von Teilungsmarken, z. B. Teilstrichen oder Punkten, auf einem Skalenträger. Strichskalen sind häufig in regelmäßigen Abständen beziffert und meist für eine stetige („analoge") Anzeige von Meßwerten einer Meßgröße bestimmt.

3.1.2. Eine Ziffernskale (z. B. bei einem Zähler) ist eine Folge von Ziffern (z. B. 0 bis 9) auf einem Skalen- oder Ziffernträger, wobei meist nur die abzulesende Ziffer sichtbar ist. Die mehrstellige Ziffernskale besteht aus mehreren, nebeneinander angeordneten einstelligen Ziffernskalen mit z. B. hinter Schau-

Bearbeiter: Deutsches Amt für Meßwesen, Berlin
Bestätigt: 22. 4. 1963, Amt für Standardisierung, Berlin

Fortsetzung Seite 2 bis 10

Ag 103/11b/70 DDR - III/18/299

Vertrieb: Buchhaus Leipzig, 701 Leipzig, Postschließfach 140 – Verlag: VEB Fachbuchverlag, 7031 Leipzig

löchern ablesbaren Ziffern; meist sind hierbei die einzelnen Ziffernskalen dezimal aufeinander abgestuft. Eine Ziffernskale ermöglicht nur eine unstetige, sprungweise („digitale") Anzeige (siehe auch Anmerkungen).

3.1.3. Gelegentlich wird eine Ziffernskale mit einer Strichskale kombiniert, z. B. beim Zahlenrollenwerk mancher Zähler. Gewöhnlich gibt dabei die Strichskale die letzte(n) Stelle(n) des Anzeigewertes an (siehe auch Anmerkungen).

3.2. Die Skalenlänge einer Strichskale ist der längs des Weges der Marke in Längeneinheiten gemessene Abstand zwischen dem Anfangsstrich und dem Endstrich der Skale. Bei anzeigenden Meßgeräten mit ebener gebogener Skale (Kreisskale) ist die Skalenlänge auf dem Bogen, der durch die Mitte der kleinsten Teilstriche verläuft, oder in Winkeleinheiten zu messen. Sie wird begrenzt durch den hervorgehobenen Anfangs- und Endstrich (siehe Abschnitt 4.2.).

3.3. Der Teilstrichabstand einer Strichskale ist der längs des Weges der Marke in Längen- oder Winkeleinheiten gemessene Abstand zweier benachbarter Teilstriche (siehe auch Anmerkungen).

3.4. Der Skalenteil (*Skt*) einer Strichskale ist eine der Teilungseinheiten (siehe Abschnitt 2.3.), in der die Anzeige angegeben werden kann; der Teilstrichabstand wird dabei als Zähleinheit für die Anzeige aufgefaßt (siehe auch Anmerkungen).

3.5. Der Ziffernschritt einer Ziffernskale ist die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ziffern.

3.6. Der Skalenwert (*Skw*) eines Meßgerätes ist gleich der Änderung der Meßgröße, die auf einer Strichskale eine Verschiebung der Marke um einen Skalenteil oder auf einer Ziffernskale einen Ziffernschritt bewirkt. Der Skalenwert ist also stets in der Einheit anzugeben, die für die Meßgröße gewählt wurde.

Wird bei einer mehrstelligen Ziffernskale die letzte Stelle auf einer Strichskale abgelesen, so ist der Skalenwert auf einen Skalenteil der Strichskale zu beziehen (siehe auch Anmerkungen).

3.7. Die Skalenkonstante einer Strichskale — bei elektrischen Instrumenten „Konstante" genannt — ist diejenige Größe, mit der der Zahlenwert, der dem Stand der Marke gemäß der Bezifferung der Skale entspricht, multipliziert werden muß, um den Meßwert zu erhalten (siehe auch Anmerkungen).

3.8. Bei Mehrbereich-Meßgeräten ist zu jedem Bereich der zugehörige Skalenwert oder die zugehörige Skalenkonstante anzugeben (siehe auch Anmerkungen).

4. Anzeigebereich, Meßbereich, Belastungsbereich, Unterdrückungsbereich, Unterbrechungsbereich

4.1. Der Anzeigebereich ist der Bereich der Meßwerte, die an einem Meßgerät abgelesen werden können. Bestimmte Meßgeräte, z. B. Thermometer mit Erweiterungen, können mehrere Teilanzeigebereiche haben (siehe auch Anmerkungen).

4.2. Der Meßbereich ist der Teil des Anzeigebereiches, für den der Fehler der Anzeige innerhalb von angegebenen oder vereinbarten Fehlergrenzen bleibt (siehe Abschnitt 12.). Der Meßbereich kann den gesamten Anzeigebereich umfassen oder aus einem Teil oder aus mehreren Teilen des Anzeigebereiches bestehen.
Bei Meßgeräten mit mehreren Meßbereichen können für die einzelnen Bereiche unterschiedliche Fehlergrenzen festgesetzt sein (siehe auch Anmerkungen).

4.3. Für Zähler gilt:

Belastung (z. B. Stromstärke, elektrische Leistung, Durchfluß) ist diejenige Größe, aus der sich die Meßgröße durch Integration über die Zeit ergibt.

Unter dem Belastungsbereich versteht man den Bereich der Belastungen, für den der Fehler der Anzeige innerhalb von angegebenen oder vereinbarten Fehlergrenzen bleibt.

4.4. Der Unterdrückungsbereich eines Meßgerätes ist derjenige Bereich von Meßwerten, oberhalb dessen das Meßgerät erst anzuzeigen beginnt und seine Anzeige abgelesen werden kann.

4.5. Der Unterbrechungsbereich eines Meßgerätes ist derjenige Bereich von Meßwerten, für welche die Skale des Meßgerätes unterbrochen ist.

5. Umkehrspanne, Anlaufwert

5.1. Die Umkehrspanne eines Meßgerätes ist gleich dem Unterschied (Differenz) der Anzeigen, die man für den gleichen Wert der Meßgröße erhält, wenn sich die Marke des Meßgerätes einmal von kleineren Ausgangswerten und ein andermal von größeren Ausgangswerten der Meßgröße her stetig langsam einstellt (siehe auch Anmerkungen).

5.2. Der Anlaufwert (Anlauf) eines zählenden Meßgerätes (Zählers) ist diejenige Belastung (siehe Abschnitt 4.3.), bei der es erst zu zählen beginnt, gleichgültig wie groß der Fehler der Anzeige des Meßgerätes bei dieser Belastung ist.

5.3. Die Umkehrspanne und besonders der Anlaufwert sind meistens (z. B. wegen der Veränderlichkeit der Reibung) nicht konstant. Man gibt daher im allgemeinen nur an, daß sie unter einer bestimmten Grenze bleiben.

6. Empfindlichkeit

6.1. Die Empfindlichkeit eines Meßgerätes (unter Umständen an einer bestimmten Stelle seiner Skale) ist das Verhältnis einer an dem Meßgerät beobachteten Änderung seiner Anzeige zu der sie verursachenden (hinreichend kleinen) Änderung der Meßgröße (siehe auch Anmerkungen).

6.1.1. Bei Meßgeräten mit Strichskale ist die Empfindlichkeit E das Verhältnis der Änderung ΔL der Anzeige in Längeneinheiten zu der sie verursachenden Änderung ΔM der Meßgröße, also $E = \Delta L/\Delta M$.

6.1.2. Bei Meßgeräten mit Ziffernskale ist die Empfindlichkeit E das Verhältnis der Änderung ΔZ der Anzeige in Ziffernschritten zu der sie verursachenden Änderung ΔM der Meßgröße, also $E = \Delta Z/\Delta M$.

6.2. Ist die Empfindlichkeit längs der Skale nicht konstant, so muß jeweils die Anzeige, für die die Empfindlichkeit gelten soll, oder der zugehörige Wert der Meßgröße angegeben werden. Insbesondere kann zwischen Anfangsempfindlichkeit und Endempfindlichkeit unterschieden werden.

6.3. Besteht eine Meßanordnung aus mehreren Gliedern, so kann unterschieden werden zwischen den Empfindlichkeiten der einzelnen Glieder und der Empfindlichkeit der Meßanordnung, die häufig Gesamtempfindlichkeit genannt wird (siehe auch Anmerkungen).

6.4. Bei Längenmeßgeräten ist die Empfindlichkeit gleich dem Verhältnis des Weges des anzeigenden Elements, z. B. des Zeigers, zum Weg des messenden Elementes, z. B. des Meßbolzens (Endweg zum Anfangsweg).

Ein Feinzeiger mit dem Übertragungsfaktor 1000 : 1 hat die Empfindlichkeit 1 mm/0,001 mm, wenn sich bei einer Änderung der Meßgröße um 0,001 mm die Anzeige um 1 mm ändert.

Grundbegriffe für die Fehler beim Messen

7. Fehlerquellen und Fehlerarten

7.1. Jedes Meßergebnis wird verfälscht durch Unvollkommenheit des Meßgegenstandes, der Maßverkörperungen, der Meßgeräte und der Meßverfahren, außerdem durch Einflüsse der Umwelt und der Beobachter, sowie durch zeitliche Veränderungen bei allen diesen Fehlerquellen (siehe auch Anmerkungen).

7.1.1. Als die Meßergebnisse verfälschende Umwelteinflüsse sind zu beachten z. B. Temperatur, Luftdruck, Feuchte, Spannung, Frequenz und fremde elektrische oder magnetische Felder.

7.1.2. Verfälschende persönliche Einflüsse sind abhängig von den Eigenschaften und Fähigkeiten der Beobachter (z. B. Aufmerksamkeit, Übung, Sehschärfe, Schätzungsvermögen).

7.1.3. Außerdem kann ein Meßergebnis verfälscht werden durch Irrtümer der Beobachter, durch Wahl eines ungeeigneten Meß- oder Auswertungsverfahrens, ferner durch Nichtbeachten einer Fehlerquelle. Derartige Versehen sind grundsätzlich vermeidbar und werden in diesem Standard nicht berücksichtigt.

7.2. Die Fehlerquellen können Fehler systematischer oder zufälliger Art verursachen.

7.2.1. Systematische Fehler werden hauptsächlich hervorgerufen durch Unvollkommenheit der Maßverkörperungen, der Meßgeräte, der Meßverfahren und des Meßgegenstandes sowie von meßtechnisch erfaßbaren Einflüssen der Umwelt und persönlichen Einflüssen der Beobachter (siehe Abschnitt 7.2.3.).

7.2.2. Systematische Fehler haben einen bestimmten Wert und ein bestimmtes Vorzeichen und lassen sich durch Anbringen von Korrektionen (Berichtigung) ausschalten. Wird der Meßwert nicht berichtigt, so ist das Meßergebnis unrichtig; es hat einen (systematischen) Fehler (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 8.).

7.2.3. Es gibt auch nicht erfaßte — weil auf einfache Weise nicht erfaßbare — systematische Fehler, die in manchen Fällen abgeschätzt und beim Ermitteln der Meßunsicherheit berücksichtigt werden können (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 11.).

7.2.4. Zufällige Fehler werden hervorgerufen von meßtechnisch nicht erfaßbaren und nicht beeinflußbaren Änderungen der Maßverkörperungen, der Meßgeräte (z. B. Reibung), des Meßgegenstandes, der Umwelt und der Beobachter. Wiederholt derselbe Beobachter an demselben Meßgegenstand eine Messung derselben Meßgröße mit demselben Meßgerät unter den gleichen Bedingungen oder vergleicht ein Beobachter dasselbe Meßgerät mit demselben Normal unter den gleichen Bedingungen mehrmals, so werden die einzelnen Meßwerte voneinander abweichen; sie „streuen" (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 9.5.1. und 9.5.2.).

Die zufälligen Fehler schwanken ungleich nach Betrag und Vorzeichen (±). Sie sind im einzelnen nicht erfaßbar und machen das Meßergebnis unsicher. Sie können aber in ihrer Gesamtheit durch eine Rechengröße zahlenmäßig erfaßt und gekennzeichnet werden, und zwar um so zuverlässiger, je größer die Anzahl der ausgeführten Messungen ist (siehe Abschnitt 9.).

8. Fehler und Korrektion bei Meßgeräten und Maßverkörperungen

8.1. Der von einem Meßgerät angezeigte Wert und der durch ein Maß verkörperte Wert einer Meßgröße sind grundsätzlich nicht fehlerfrei (siehe Abschnitt 7.2.2.).

Der jeweilige Unterschied zwischen dem gemessenen und dem als richtig geltenden oder fundamental ermittelten Wert oder gegen den durch Vergleich mit einem Normalgerät oder mit einem Normal ermittelten Wert wird Fehler genannt; dieser Fehler ist systematischer Art.

Es ist unerläßlich, stets anzugeben, worauf (z. B. Anzeige, Aufschrift einer Maßverkörperung) sich der Fehler bezieht.

8.1.1. Für anzeigende Meßgeräte gilt:

Fehler der Anzeige gleich Istanzeige minus Sollanzeige.

Istanzeige ist die am Meßgerät abgelesene Anzeige.

Sollanzeige ist die Anzeige, die ein fehlerfreies Meßgerät angeben würde („richtiger" Wert, praktisch ermittelt z. B. durch Vergleich mit einem Normal).

8.1.2. Für Maßverkörperungen (in Abschnitt 1.5. als Verkörperung eines bestimmten Wertes einer Meßgröße definiert) gilt:

Fehler gleich Istmaß minus Sollmaß.

Istmaß ist der tatsächliche, durch die Messung (z. B. durch Vergleich mit einem Normal) ermittelte Wert der Maßverkörperung. Sollmaß ist der Wert, den die Maßverkörperung (z. B. nach ihrer Aufschrift) haben sollte; dieser wird als „richtiger" Wert angesehen.

8.2. Der relative Fehler der Anzeige eines Meßgerätes wird normalerweise auf die Sollanzeige bezogen, also:

$$\text{relativer Fehler gleich } \frac{\text{Istanzeige minus Sollanzeige}}{\text{Sollanzeige}}$$

Zur Kennzeichnung eines Meßgerätes darf der relative Fehler auch auf den Endwert des Meßbereiches bezogen werden:

$$\text{relativer Fehler gleich } \frac{\text{Istanzeige minus Sollanzeige}}{\text{Endwert des Meßbereichs}}$$

Im Zweifelsfall ist stets anzugeben, worauf der relative Fehler bezogen ist (siehe auch Anmerkungen).

Bei einer Maßverkörperung (im Sinne von Abschnitt 8.1.2.) gilt:

$$\text{relativer Fehler gleich } \frac{\text{Istmaß minus Sollmaß}}{\text{Sollmaß}}$$

(siehe auch Anmerkungen).

8.3. Zuweilen wird auch der Begriff Korrektion (Berichtigung) benutzt, der folgendermaßen definiert wird: Die Korrektion (Berichtigung) hat den gleichen Absolutwert wie der Fehler, aber das entgegengesetzte Vorzeichen (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 7.2.2.).

9. Rechnerische Erfassung der zufälligen Fehler: Arithmetisches Mittel, Standardabweichung, Vertrauensgrenzen des Mittelwertes

(siehe auch Anmerkungen)

9.1. Arithmetisches Mittel, Mittelwert

(siehe auch Anmerkungen)

Sind bei einer Meßreihe n voneinander unabhängige Einzelwerte $x_1 \ldots x_i \ldots x_n$ unter Voraussetzung der Festlegungen im Abschnitt 7.2.4. gemessen worden, so gilt als Ergebnis üblicherweise das arithmetische Mittel aus diesen n Einzelwerten, kurz Mittelwert $\bar{x}$ genannt (gesprochen x-quer)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

9.2. Standardabweichung

(siehe auch Anmerkungen)

Die wichtigste Rechengröße für die zufälligen Abweichungen der Einzelwerte von ihrem Mittelwert ist die mittlere quadratische Abweichung (mittlerer quadratischer Fehler der Einzelbeobachtung), die Standardabweichung s genannt wird; sie wird definiert als:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} .$$

9.2.1. Für hinreichend große Werte von n unterscheidet sich s beliebig wenig von einer Größe, die Standardabweichung σ der (sehr großen) Grundgesamtheit genannt wird (siehe auch Anmerkungen).

9.2.2. Bei einer Normalverteilung (Gaußschen Verteilung) fallen im Mittel von 1000 unabhängigen Einzelwerten praktisch:

317 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 1{,}00\,\sigma$
(Statistische Sicherheit $P = 68{,}3\%$)

46 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 2{,}0\,\sigma$
(Statistische Sicherheit $P = 95{,}4\%$)

3 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 3{,}0\,\sigma$
(Statistische Sicherheit $P = 99{,}7\%$, genauer 99,73%)

Eine statistische Sicherheit von z. B. $P = 68{,}3\%$ bedeutet, daß 68,3% einer sehr großen Anzahl n von Einzelwerten innerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 1{,}00\,\sigma$ zu erwarten sind.

In der Industrie wird bei der Fertigungsüberwachung zunehmend die statistische Sicherheit $P = 95\%$ vorgezogen, auf manchen Anwendungsgebieten auch $P = 99\%$.

Von 1000 unabhängigen Einzelwerten fallen hierbei:

50 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 1{,}96\,\sigma$ ($P = 95\%$),
10 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 2{,}58\,\sigma$ ($P = 99\%$).

(siehe auch Anmerkungen und Tafel 1).

9.3. Vertrauensgrenzen und Vertrauensbereich des Mittelwertes (siehe auch Anmerkungen).

Der in Abschnitt 9.1. definierte Mittelwert wird häufig als endgültiges Meßergebnis einer Meßreihe (mit voneinander unabhängigen und gleich zuverlässigen Einzelwerten) angegeben. Der Beobachter darf nicht ohne weiteres annehmen, daß dieser Mittelwert gleich dem gesuchten wahren Wert der Meßgröße ist, der bei Abwesenheit von systematischen Fehlern nur aus einer sehr großen Anzahl von Einzelmeßwerten gewonnen werden kann. Es ist aber möglich, zwei Grenzen — oberhalb und unterhalb des gefundenen Mittelwertes — anzugeben, zwischen denen (bei Abwesenheit von systematischen Fehlern) der wahre Wert mit der gewählten statistischen Sicherheit P zu erwarten ist. Diese Grenzen heißen V e r t r a u e n s g r e n z e n des Mittelwertes. Der Bereich, den diese Grenzen einschließen (Intervall zwischen den Vertrauensgrenzen), heißt V e r t r a u e n s b e r e i c h des Mittelwertes.

Stets sollte beim Vertrauensbereich, wie bei allen Fehlerangaben, die gewählte statistische Sicherheit P angegeben werden.

9.3.1. D i e S t a n d a r d a b w e i c h u n g σ d e r G r u n d g e s a m t h e i t (siehe Abschnitt 9.2.1.) i s t n i c h t b e k a n n t.

In diesem Fall sind die Vertrauensgrenzen gegeben durch:

obere Vertrauensgrenze: $\bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} s$

untere Vertrauensgrenze: $\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s$

Vertrauensbereich: $\pm \frac{t}{\sqrt{n}} s$

(auch $\bar{x} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s$ geschrieben).

Dabei hängt der Faktor t von der gewählten statistischen Sicherheit P und außerdem von der Anzahl n der Einzelwerte ab (siehe Tabelle in Abschnitt 9.3.1.1.).

9.3.1.1. Für die drei heute überwiegend benutzten statistischen Sicherheiten $P = 68{,}3\%$, $P = 95{,}0\%$ und $P = 99{,}73\%$ sowie für $P = 99\%$ sind die zugeordneten Werte für den Faktor t und $t/\sqrt{n}$ in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

Werte für t und $t/\sqrt{n}$ (gerundete Zahlenwerte) bei verschiedener statistischer Sicherheit P

Anzahl der Einzelwerte n	Werte für t und $t/\sqrt{n}$							
	1 σ-Regel $P = 68{,}3\%$		3 σ-Regel $P = 99{,}73\%$		$P = 95\%$		$P = 99\%$	
	t	$t/\sqrt{n}$	t	$t/\sqrt{n}$	t	$t/\sqrt{n}$	t	$t/\sqrt{n}$
(2)	(1,8)	(1,3)	(235)	(166)	(12,7)	(9,0)	(64)	(45)
3	1,32	0,76	19,2	11,1	4,3	2,5	9,9	5,7
4	1,20	0,60	9,2	4,6	3,2	1,6	5,8	2,9
5	1,15	0,51	6,6	3,0	2,8	1,24	4,6	2,1
6	1,11	0,45	5,5	2,3	2,6	1,05	4,0	1,6
8	1,08	0,38	4,5	1,6	2,4	0,84	3,5	1,24
10	1,06	0,34	4,1	1,29	2,3	0,72	$3{,}2_5$	1,03
20	1,03	0,23	3,4	0,77	2,1	0,47	2,9	0,64
30	1,02	0,19	3,3	0,60	$2{,}0_5$	0,37	2,8	0,50
50	1,01	0,14	$3{,}1_6$	0,45	2,0	0,28	2,7	0,38
100	1,00	0,10	3,1	0,31	2,0	0,20	2,6	0,26
200	1,00	0,07	$3{,}0_4$	0,22	$1{,}9_7$	0,14	2,6	0,18
sehr groß (über 200)	1,0	0	3,0	0	1,96 *)	0	2,58	0

Das über jede physikalisch sinnvolle Grenze hinausgehende Anwachsen von t bei kleiner Anzahl n, besonders für hohe statistische Sicherheit P, zeigt, daß bei nur zwei Messungen überhaupt keine statistische Aussage mehr gemacht werden kann, wenn s bzw. σ nicht aus früheren Beobachtungen bekannt sind (siehe Abschnitt 9.3.2.).

9.3.2. D i e S t a n d a r d a b w e i c h u n g σ d e r G r u n d g e s a m t h e i t (siehe Abschnitt 9.2.1.) i s t b e k a n n t.

Ist die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit aus einer genügenden Anzahl früherer Messungen bekannt, z. B. aus genügend vielen früheren Meßreihen (siehe auch Anmerkungen), so vereinfachen sich die symbolisch geschriebenen Ausdrücke für die Vertrauensgrenzen bzw. den Vertrauensbereich des Mittelwertes aus n Einzelmessungen zu

$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ für die statistische Sicherheit $P = 68{,}3\%$

$\bar{x} \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ für die statistische Sicherheit $P = 99{,}73\%$

$\bar{x} \pm \frac{1{,}96\,\sigma}{\sqrt{n}}$ für die statistische Sicherheit $P = 95\%$

$\bar{x} \pm \frac{2{,}58\,\sigma}{\sqrt{n}}$ für die statistische Sicherheit $P = 99\%$

*) Vielfach wird es genügen, hier $t \approx 2$ zu setzen.

9.4. Angabe des Meßergebnisses
(siehe auch Anmerkungen)

Das endgültige Ergebnis (Endergebnis) einer Meßreihe von n Einzelwerten gibt man durch den (von systematischen Fehlern befreiten) Mittelwert und den Vertrauensbereich (für die statistische Sicherheit P) an, und zwar:

9.4.1. entweder in der Einheit der Meßgröße als:

$\bar{n} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s$

9.4.2. oder, wenn man den Vertrauensbereich relativ, im Verhältnis zum Mittelwert ausdrücken will, als:

$\bar{x}\,(1 \pm \varepsilon)$ mit $\varepsilon = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s}{\bar{x}}$ (siehe auch Anmerkungen).

9.5. Versuchsvoraussetzungen

Vor der statistischen Behandlung von Meßwerten einer Meßgröße ist zu prüfen, ob die Messungen unter den gleichen Versuchsbedingungen und unabhängig voneinander durchgeführt worden sind. Es hat sich herausgestellt, daß man zweckmäßig zwischen folgenden b e i d e n G r e n z f ä l l e n p r a k t i s c h e r Versuchsvoraussetzungen unterscheidet:

9.5.1. W i e d e r h o l - B e d i n g u n g e n

Ein Beobachter bestimmt die Meßgröße mit ein und demselben Meßgerät (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 7.2.4.). Unter Wiederhol-Bedingungen sind systematische Fehler meist nicht erkennbar. Daher sind in diesem Fall die Regeln für die Rechengrößen der zufälligen Fehler anzuwenden.

9.5.2. V e r g l e i c h - B e d i n g u n g e n

Verschiedene Beobachter führen Messungen in verschiedenen Laboratorien oder/und unter Verwendung von verschiedenen Meßgeräten der gleichen Bauart durch. In diesem Fall ist die Standardabweichung im allgemeinen größer als im Fall der in Abschnitt 9.5.1. beschriebenen Wiederhol-Bedingungen (siehe auch Anmerkungen).

Unter Vergleich-Bedingungen können die Meßergebnisse infolge systematischer Fehler voneinander abweichen. Es ist daher zunächst eine Analyse dieser systematischen Abweichungen vorzunehmen. Sind diese zahlenmäßig feststellbar, so müssen die einzelnen Meßwerte erst entsprechend berichtigt werden.

9.5.3. Wiederhol- und Vergleich-Bedingungen sind als Grenzfälle hier besonders aufgeführt. Die Wiederhol-Bedingungen entsprechen dem üblichen Fall in einem einzigen Laboratorium, die Vergleich-Bedingungen sind Voraussetzungen etwa eines Ringversuches mit verschiedenen teilnehmenden Laboratorien (siehe auch Anmerkungen).

10. Fehlerfortpflanzung

Die bisherigen Betrachtungen haben sich auf die Definition des systematischen Fehlers, der Rechengrößen für die zufälligen Fehler (Standardabweichung, Vertrauensbereich) und der Meßunsicherheit (siehe Abschnitt 11.) bei der experimentellen Ermittlung einer e i n z e l n e n Meßgröße beschränkt. Ist das Meßergebnis aber eine F u n k t i o n einer oder mehrerer Meßgrößen (Meßwerte), so ist der Fehler des Meßergebnisses nach der Fehlerfortpflanzungsregel zu ermitteln. Die Fehlerfortpflanzung ist für die erfaßten systematischen Fehler a n d e r s zu behandeln als für die Rechengrößen der zufälligen Fehler (siehe auch Anmerkungen).

10.1. Fehlerfortpflanzung für systematische Fehler

Der systematische Fehler Δy einer Funktion

$y = F\,(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_v)$

wird aus den genügend kleinen systematischen Fehlern Δx_1 bis Δx_ν der einzelnen voneinander unabhängigen Meßgrößen x_1 bis x_ν nach folgender Formel (unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung) berechnet:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots \frac{\partial F}{\partial x_\nu} \Delta x_\nu$$

(Vorzeichen beachten!)

Für den Fall, daß y die Funktion einer einzigen Meßgröße x_1 ist, vereinfacht sich diese Formel (Fehlerfortpflanzungsregel) zu:

$$\Delta y = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1$$

Ist z. B. $y = k \cdot x^m$, so ist der Fehler der Funktion y

$$\Delta y = m \frac{y}{x} \Delta x$$

und ihr relativer Fehler

$$\frac{\Delta y}{y} = m \frac{\Delta x}{x}$$

10.2. Fehlerfortpflanzung für Rechengrößen der zufälligen Fehler

Sind unter der Voraussetzung einer Normalverteilung der Meßwerte die Standardabweichungen s_1 bis s_ν (gewonnen aus Meßreihen mit gleicher Anzahl der Einzelwerte) der voneinander unabhängigen Meßgrößen x_1 bis x_ν bekannt, so berechnet man die Standardabweichung s_y des Meßergebnisses $y = F(x_1 \ldots x_i \ldots x_\nu)$ unter der Voraussetzung: $s_i \ll x_i$ aus der Formel:

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot s_i \right)^2}$$

Ist jeweils die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit bekannt, so tritt an die Stelle von s die Größe σ; die Formel für s_y gilt streng nur für σ_y und σ_i.

Ist z. B. das Meßergebnis y eine lineare Funktion

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_\nu x_\nu$$

der Variablen x_1 bis x_ν, deren Standardabweichungen s_1 bis s_ν bekannt sind, so hat das Meßergebnis y die Standardabweichung

$$s_y = \sqrt{(a_1 s_1)^2 + (a_2 s_2)^2 + \ldots (a_\nu s_\nu)^2}$$

Die angegebenen Formeln für s_y sind zu benutzen, wenn das Meßergebnis y als Funktion von Einzelwerten, d. h. $y = F(x_1, x_2 \ldots x_\nu)$ oder als Funktion von Mittelwerten, d. h. $y = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_\nu)$ gegeben ist.

Ist im besonderen das Meßergebnis eine Funktion von Mittelwerten $\bar{x}_i$, von denen jeder aus einer Stichprobe mit der gleichen Anzahl m unabhängiger Einzelwerte stammt, also:

$\bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ mit den zugeordneten Vertrauensbereichen

$\frac{t}{\sqrt{m}} s_i$ (bei jeweils gleichgroßer statistischer Sicherheit!), so

kann der Vertrauensbereich $\frac{t}{\sqrt{m}} s_y$ des Meßergebnisses y berechnet werden.

Man verfährt nach Abschnitt 10.2. und setzt in der Formel unter dem Wurzelzeichen die Vertrauensbereiche $\frac{t}{\sqrt{m}} s_i$ an Stelle von s_i ein.

11. Meßunsicherheit

Die praktisch angegebene Unsicherheit eines Meßergebnisses, d. h. die Meßunsicherheit eines Ergebnisses umfaßt immer die zufälligen Fehler (rechnerisch ausgedrückt durch die Standardabweichung bzw. durch den Vertrauensbereich) aller Einzelvariablen, aus denen das Meßergebnis berechnet wird, sowie zusätzlich nicht erfaßte, weil nicht meßbare und daher nur abschätzbare systematische Fehler. Grundsätzlich wird vorausgesetzt, daß die erfaßten systematischen Fehler berichtigt sind (siehe auch Anmerkungen und Abschnitte 7. und 8.).

Grundsätzlich hat also das Endergebnis einer Meßreihe von n unabhängigen Einzelwerten die Form:

$$\text{Endergebnis } y = (\bar{x} \pm u)$$

$$\text{Meßunsicherheit } u = \left(\frac{t}{\sqrt{n}} s + f \right),$$

wobei $\bar{x}$ der von den erfaßten systematischen Fehlern befreite Mittelwert ist und f einen abgeschätzten Betrag der nicht erfaßbaren oder nicht erfaßten systematischen Fehler bedeutet; $\frac{t}{\sqrt{n}}$ ist aus der Tabelle in Abschnitt 9.3.1.1. zu entnehmen.

Es bleibt zunächst noch offen, welche statistische Sicherheit den Angaben zugrunde zu legen ist. Den Beispielen anderer Länder zu folgen, sollte allgemein für die Angabe von Fehlern die statistische Sicherheit $P = 95{,}0\%$ eingeführt werden.

Der Ausdruck „Meßgenauigkeit" ist bei quantitativen Angaben zu vermeiden. Man sollte nur die in diesem Standard definierten Begriffe: „Meßunsicherheit" und „Fehlergrenzen" (siehe Abschnitt 12.) verwenden!

12. Fehlergrenzen

Von den in den Abschnitten 7. bis 9. behandelten Fehlern und von der Meßunsicherheit sind begrifflich streng zu unterscheiden die Fehlergrenzen (siehe auch Anmerkungen).

12.1. Die Fehlergrenzen in der praktischen Meßtechnik sind die vereinbarten oder garantierten, zugelassenen äußersten Abweichungen nach oben oder nach unten von der Sollanzeige oder vom Sollmaß oder von einem sonst vorgeschriebenen Wert der Meßgröße. Fehlergrenzen können einseitig (Vorzeichen + oder −) oder zweiseitig (±) sein und dürfen nicht überschritten werden, unabhängig von der Meßunsicherheit, mit der die Istanzeige oder das Istmaß oder das Meßergebnis bestimmt werden kann (siehe auch Anmerkungen).

12.1.1. Garantiefehlergrenzen einer Maßverkörperung oder eines Meßgerätes

Garantiert der Hersteller eines Meßgerätes, daß die Fehler der mit dem Meßgerät unter festgelegten Bedingungen ermittelten Meßwerte (Istanzeigen) innerhalb vorgeschriebener Grenzen liegen, so heißen diese garantierten Grenzen die Garantiefehlergrenzen des Meßgerätes (siehe auch Anmerkungen).

12.1.2. Eichfehlergrenzen einer Maßverkörperung oder eines Meßgerätes

Die Eichfehlergrenzen einer Maßverkörperung (siehe Abschnitt 1.5.) bezeichnen das größte Mehr oder Minder, bis zu dem (nach der Eichordnung) — beim Vergleich mit einem Normal — das Istmaß vom Sollmaß abweichen darf. Die betreffende Maßverkörperung erhält den Eichstempel nur, wenn das Istmaß innerhalb des Bereiches: Sollmaß ± Eichfehlergrenzen liegt.

Für die Eichfehlergrenzen eines Meßgerätes treten an die Stelle von Istmaß und Sollmaß sinngemäß die Begriffe: Istanzeige und Sollanzeige (siehe auch Anmerkungen).

12.2. Damit die Fehlergrenzen sicher eingehalten werden können, soll die Meßunsicherheit (siehe Abschnitt 11.) erheblich geringer sein (möglichst nicht größer als $^1/_3$) als der durch die Fehlergrenzen (Garantiefehlergrenzen, Eichfehlergrenzen) gegebene Bereich (siehe auch Anmerkungen, Bild 2).

12.3. Fehlergrenzen können in zweierlei Schreibweise gekennzeichnet werden:

a) meist durch die Angabe des Bereiches, innerhalb dessen der Meßwert liegen darf; geschrieben z. B. als:
   Garantiefehlergrenzen eines Meßgerätes:
   ± 0,2%, bezogen auf den Endwert, oder:
   Eichfehlergrenzen eines Thermometers:
   ± 0,15 grd.

b) durch die Grenzwerte der Meßgröße, z. B.
   zulässiger Größtwert: 20,15 °C,
   zulässiger Kleinstwert: 19,85 °C.

Anmerkungen

Zu 1.5.

Manche Lehren können vor dem Gebrauch auf eine gewünschte Größe eingestellt werden, gelegentlich auch mittels Skale und Marke (einstellbare Lehren).

Zu 2.1. und 2.4.

In der Geodäsie wird die Meßgröße noch Beobachtungsgröße, der Meßwert auch Beobachtungswert genannt.

Zu 2.5.

Die weitere Verarbeitung von Meßergebnissen (z. B. Summenbildung) fällt nicht in den Bereich dieses Standards.

Zu 3.1.2.

Bei Ziffernskalen kann eine eigentliche Marke fehlen; die abzulesende Ziffer wird dann durch die Beleuchtung, z. B. als Leuchtziffer, markiert (dekadische Zählröhren).

Zu 3.1.3.

Beispiel: Zahlenrollenwerk

Ein Zahlenrollenwerk mit 5 Rollen, von denen die ersten 4 Rollen Ziffernskalen mit der Bezifferung von 0 bis 9 sind und die fünfte Rolle eine Strichskale mit 100 Teilstrichen und mit einer Bezifferung von 0 bis 90 ist.

Zu 3.3.

Ein zu kleiner Teilstrichabstand ($<$ 0,7 mm) sollte vermieden werden, da bei diesem das Ablesen ermüdend, insbesondere eine Zehntelschätzung nicht möglich und dadurch die Beobachtung unsicherer ist. Die Ablesemarke soll über die Mitte der kleinsten Teilstriche laufen. Bei Geräten mit fest eingebauter optischer Vergrößerung ist maßgebend der scheinbare Teilstrichabstand, d. h. das Produkt aus dem vorher definierten Teilstrichabstand und der optischen Vergrößerung oder dem Abbildungsmaßstab.

Zu 3.4.

Der Skalenteil als Teilungseinheit sollte nur bei linearer Skalenteilung benutzt werden.

Zu 3.6.

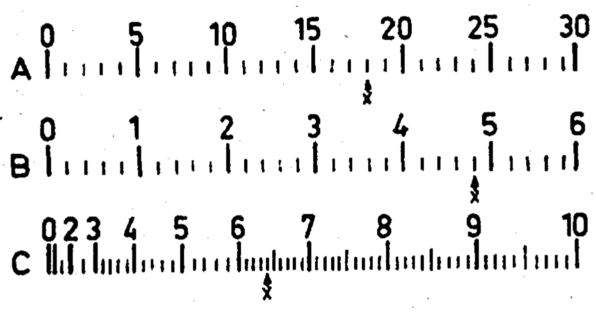
Bei Meßgeräten, die zum Bestimmen mehrerer Meßgrößen verwendet werden können, gibt es auch mehrere Skalenwerte. Bei Indikatoren mit nur einem (Null-)Strich gibt es keinen Skalenwert, sondern nur eine Empfindlichkeit (siehe Abschnitt 6.).

Im Vermessungswesen wird der Skalenwert bei Libellen auch Angabe genannt.

Zu 3.6. und 3.7.

Der Unterschied zwischen den Begriffen „Skalenwert" und „Skalenkonstante" sei an 3 Skalenbildern erläutert:

Skale	Anzeige bei Stelle x Zahlenwert	Anzeige bei Stelle x Skalenteile	Meßbereich z. B.	Skalenwert	Skalenkonstante	Meßwert bei Stelle x
A	18,0	18	6 mA	0,2 mA	0,2 mA	3,6 mA
B	4,8	24	6 mA	0,2 mA	1,0 mA	4,8 mA
C	6,4	—	1 A	—	0,1 A	0,64 A



Beim Skalenbild A sind die Skalenteile fortlaufend gezählt und ist jeder fünfte beziffert. Bei einer gleichmäßig geteilten Skale stimmen also Skalenwert und Skalenkonstante überein, wenn die Bezifferung die Anzahl der Skalenteile angibt.

Beim Skalenbild B sind Gruppen von je 5 Skalenteilen fortlaufend gezählt und beziffert. Daher ist hier der Skalenwert verschieden von der Skalenkonstante. Der Meßwert an der Stelle x ergibt sich aus: 4,8 · 1 = 24 · 0,2 = 4,8 mA.

Beim Skalenbild C mit nichtlinearer (hier quadratischer) Charakteristik muß die Unterteilung der Skale zwischen den langen, bezifferten Teilstrichen am Anfang gröber als am Ende sein. Die Skalenwerte sind hier: 0,1 A; 0,05 A; 0,02 A; 0,01 A in den Anzeigebereichen: 0 bis 1; 1 bis 3; 3 bis 5; 5 bis 10.

Daher kann in solchen Fällen nur die Skalenkonstante benutzt werden, die immer unabhängig von der Skalenteilung ist.

Bei elektrischen Lichtzeigerinstrumenten (z. B. Spiegelgalvanometern, Oszillographenmeßwerken, Elektrometern) ist an Stelle des Skalenwertes der Begriff Strom- und Spannungskonstante gebräuchlich. Diese Konstanten sind gleich der Änderung der Meßgröße, die bei einem Abstand von 1 m zwischen Instrument und Skale eine Änderung der Anzeige um 1 mm hervorruft (Stromkonstante z. B. 0,5 nA).

Zu 4.1.

Beim Umschalten eines Meßgerätes mit mehreren Anzeigebereichen ändern sich mit dem Anzeigebereich der Skalenwert, die Skalenkonstante und im allgemeinen auch die Empfindlichkeit.

Zu 4.2.

Jenseits der (hervorgehobenen) Anfangs- und Endteilstriche einer Skale etwa vorhandene Teilstriche gehören nicht zum Meßbereich.

Zu 5.1.

Ursachen einer Umkehrspanne sind z. B. Reibung, toter Gang, elastische Nachwirkung, Remanenz, Hysterese. Die Umkehrspanne muß an mehreren Stellen des Anzeigebereichs gemessen werden.

Zu 6.1.

Es ist sinnwidrig und daher irreführend, als Empfindlichkeit etwa den Kehrwert der in Abschnitt 6.1. definierten Empfindlichkeit zu benennen. Beispielsweise ist die Stromempfindlichkeit eines Galvanometers nicht 10^{-8} A je mm, sondern 100 mm/µA (anschaulicher als 10^{8} mm/A).

Hat bei einem Galvanometer eine Änderung des Stromes von 0,5 nA eine Änderung der Anzeige um 1 mm zur Folge, so ist die Stromempfindlichkeit des Galvanometers 2 mm/nA.

Man beachte, daß die Empfindlichkeit nur auf die Änderung der Anzeige und nicht auf den Ausschlagwinkel bezogen wird. Verlängert man also den Drehzeiger (Lichtzeiger) eines Meßgerätes, so wird die auf die Änderung der Anzeige bezogene Empfindlichkeit größer, obgleich der Ausschlagwinkel ungeändert bleibt. Ähnliches gilt für den Fall, daß beim Ablesen der Anzeige optische Vergrößerungsmittel, z. B. Lupen, verwendet werden.

Es widerspricht der in Abschnitt 6.1. gegebenen Definition, etwa das Verhältnis eines ersten deutlich erkennbaren Unterschiedes der Anzeige zu der verursachenden Änderung der Meßgröße „Empfindlichkeit" zu nennen. Dieser, auch (Reiz-)Meßschwelle genannte Begriff ist sehr unbestimmt und sollte daher vermieden werden.

Nennt man den Teilstrichabstand einer Strichskale A, den Skalenwert S und die Empfindlichkeit E, so ist $E = \Delta L/\Delta M \approx A/S$. Die Empfindlichkeit ist daher auch angenähert gleich dem Verhältnis des Teilstrichabstandes zum Skalenwert und nach ihrer Definition von der Beschaffenheit der Teilung unabhängig.

Zu 6.3.

Bei einer Meßanordnung aus mehreren Meßgeräten ist meist außer der Meßgröße und der Anzeige noch eine Reihe von weiteren Größen veränderbar. Dann kann man außer den in Abschnitt 6.1. zur Definition der Empfindlichkeit benutzten noch weitere — partielle — Differenzquotienten bilden und diese (oder einige von ihnen) ebenfalls Empfindlichkeit nennen. Solche zusätzlichen Empfindlichkeiten, die in ihrer Dimension mit der in Abschnitt 6.1. eingeführten nicht übereinzustimmen brauchen, lassen sich nur von Fall zu Fall definieren. Bei ihrer Definition sollte jedoch beachtet werden, daß im Zähler jeder Empfindlichkeit die Änderung der Wirkung stehen muß, im Nenner dagegen die Änderung der Ursache, und daß es nur dann Sinn hat, von Empfindlichkeit zu sprechen, wenn kein

Zweifel darüber bestehen kann, welche Größe als Ursache und welche als Wirkung aufzufassen ist.

Beispiel:

Bei Meßgeräten mit selbsttätigem Abgleich steuert ein Indikator eine Regelvorrichtung, die den Abgleich herstellt und gleichzeitig eine Marke auf einer Skale verschiebt. Der Benutzer eines solchen Meßgerätes wird die Empfindlichkeit — im Einklang mit der unter Abschnitt 6.1. gegebenen Definition — immer auf die meist allein ablesbare, mit dem Stellglied gekoppelte Änderung der Anzeige beziehen.

Zu 7.1.

Wesentliche Fehlerquelle kann auch die Unbestimmtheit der Meßgröße sein, die häufig nur als Mittelwert einer Anzahl Einzelmessungen erfaßt werden kann, z. B. die Härte eines Stahlteiles. Bei Messungen an Prüfgut müssen die Proben einheitlich und fachgemäß entnommen werden. Bei Anspruch an höchste Genauigkeit erweist sich jede Meßgröße als unbestimmt.

Zu 7.2.2.

Die erfaßten systematischen Fehler werden gemäß Abschnitt 8. als Fehler (oder nach Abschnitt 8.3. als Korrektion) additiv berücksichtigt. Falls sie dagegen nicht berücksichtigt sind, muß man den Betrag der Meßunsicherheit (siehe Abschnitt 1.1.) oder den Betrag des Vertrauensbereiches (siehe Abschnitt 9.3.) des als Ergebnis vorliegenden Mittelwertes um einen entsprechenden Betrag erhöhen.

Zu 7.2.3.

Unmittelbar nicht erfaßbare systematische Fehler können dadurch entstehen, daß ein Meßgerät einen unbekannten systematischen Fehler hat oder bei einem Meßverfahren unvermeidliche Störeinflüsse nicht berücksichtigt werden können.

Beispiel: Wärmeverluste durch Ableitung bei kalorischen und bei Temperaturmessungen. Eine Aufklärung kann in solchem Fall nur die Anwendung eines oder mehrerer andersartiger Meßgeräte oder andersartiger Meßverfahren bringen.

Zu 7.2.4.

Das Streuen der einzelnen Werte einer Meßreihe kann auch dadurch hervorgerufen werden, daß sich der Meßgegenstand selbst während der Meßdauer ändert, d. h. daß seine zu messende Eigenschaft, die Meßgröße, zufälligen Schwankungen unterworfen ist. Auch in diesem in der Praxis recht häufigen Fall ist die Bildung des Mittelwertes und der Standardabweichung sinnvoll, und es kann auch hier ein Vertrauensbereich angegeben werden, der jetzt die Veränderlichkeit der Meßgröße mit kennzeichnet.

Zu 8.2.

Bei elektrischen Meßgeräten wird z. B. bei stark nichtlinearer Skalenteilung der relative Fehler der Anzeige auf die Skalenlänge bezogen, d. h.

$$\text{relativer Fehler gleich } \frac{\text{Istanzeige minus Sollanzeige}}{\text{Skalenlänge}}$$

Dabei sind Istanzeige und Sollanzeige in Längeneinheiten einzusetzen.

Zu 8.3.

Vorzugsweise soll der Fehler und nicht die Korrektion angegeben werden.

Zu 9.

An Stelle der in Abschnitt 9. behandelten Begriffe, wie sie sich immer mehr im internationalen Schrifttum einbürgern, werden noch vielfach — z. B. in der Geodäsie — folgende Ausdrücke verwendet:

mittlerer quadratischer Fehler oder mittlerer Fehler an Stelle von Standardabweichung,

mittlerer Fehler des Mittelwertes an Stelle vom Vertrauensbereich des Mittelwertes,

mittlerer Fehler des mittleren Fehlers an Stelle von Vertrauensgrenzen der Standardabweichung,

Verbesserung an Stelle von Abweichung,

Beobachtungsgröße an Stelle von Meßgröße.

Hier wird auch noch das Gaußsche Summensymbol benutzt und z. B. [x] für $\sum x$ gesetzt. [x] ist möglichst zu vermeiden (siehe TGL 0-1302).

Zu 9.1. und 9.2.

Die in den Abschnitten 9.1. und 9.2. angegebenen Formeln werden für den Gebrauch eines Rechenschiebers zweckmäßig umgewandelt in:

$$\bar{x} = x_a + \frac{1}{n} \sum (x_i - x_a);$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_a)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum (x_i - x_a)\right]^2}{n-1}}$$

und für den Gebrauch einer Rechenmaschine in:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i;$$

$$s = \sqrt{\frac{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i}{n-1}}$$

Dabei ist x_a ein runder Zahlenwert, der nahe am geschätzten Mittelwert liegt (siehe TGL 0-51 849).

Zu 9.1.

Außer dem einfachen oder gewöhnlichen Mittelwert wird manchmal auch der gewogene Mittelwert gebraucht:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

wobei p_i das Gewicht der i^{ten} Einzelmessung bedeutet.

Zu 9.2.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei erwähnt, daß in der Statistik als Rechengröße für die zufälligen Fehler neben der Standardabweichung s (englisch: standard deviation) vornehmlich s^2 als „Varianz" (englisch: variance) gebräuchlich ist.

Zu 9.2.1.

Der Begriff „sehr groß" ist hier bewußt mit einer gewissen Unschärfe gebraucht. Der zulässige Mindestwert für n, welche der Bedingung „sehr groß" genügt, hängt jeweils von der gewählten statistischen Sicherheit P und von den für ausreichend erachteten Vertrauensgrenzen der Standardabweichung s ab.

Die Standardabweichung s ist, genau wie der Mittelwert $\bar{x}$, nur mit einer gewissen Unsicherheit bestimmbar, die man (analog wie beim Mittelwert) durch die „Vertrauensgrenzen der Standardabweichung", kennzeichnet. Der zahlenmäßige Betrag für diese Vertrauensgrenzen der Standardabweichung wird im Schrifttum meist in Form von Diagrammen, für $P = 95\%$ als Zahlentafel angegeben. Will man z. B. bei einer statistischen Sicherheit $P = 95\%$ die Standardabweichung s innerhalb von Vertrauensgrenzen der Größenordnung $\pm$ 10% (bezogen auf die Standardabweichung) ermitteln, so sind hierfür $n = 150$ bis 200 Einzelwerte nötig. Ist man aber damit zufrieden, daß die Standardabweichung nur auf etwa $\pm$ 20% bekannt ist, so dürfen schon $n = 50$ Einzelwerte (für $P = 95\%$) als genügend betrachtet werden. Bei einer statistischen Sicherheit von 68,3% ist die notwendige Anzahl n natürlich geringer als bei $P = 95\%$. Es soll an diesem Beispiel nur die Größenordnung von n veranschaulicht werden. In Wirklichkeit liegen die Vertrauensgrenzen der Standardabweichung s nicht symmetrisch um den errechneten Wert s.

Man kann zu einer gut angenäherten Bestimmung von σ auch dadurch kommen, daß man mehrere Meßreihen 1 bis k mit n_1, $n_2 \ldots n_k$ Einzelmeßwerten nach der Gruppenregel auswertet und damit einen s- bzw. σ-Wert erhält, der auf der größeren Anzahl $n = n_1 + n_2 + \ldots n_k$ Einzelwerten beruht. Die Grundgesamtheit ist die Gesamtheit aller möglichen Meßwerte.

Zu 9.2.2.

Zur Anwendung der drei bevorzugten statistischen Sicherheiten oder Bereiche in der Praxis ist folgendes zu sagen:

In der Physik und in der Vermessungstechnik rechnet man weithin mit dem „mittleren Fehler" der Einzelbeobachtung, d. h. besser ausgedrückt, mit dem einfachen Betrag der Standardabweichung s und begnügt sich dabei bewußt mit der geringen statistischen Sicherheit $P = 68{,}3\%$. In der Biologie hat man seit langem die hohe statistische Sicherheit $P = 99{,}73\%$ für zweckmäßig gehalten. In der Industrie bevorzugt man neuerdings weithin die statistische Sicherheit $P = 95{,}0\%$.

Einen guten Überblick über die Ergebnisse von Versuchen erhält man durch Aufzeichnen der Häufigkeit gewonnener Einzelwerte (Gesamtanzahl n), siehe Bild 1. Zweckmäßig bestimmt man zunächst den Mittelwert $\bar{x}$ aus den n beobachteten Einzelwerten; dann faßt man diese in Gruppen (Klassen) nach kleinen (gleich großen) Abzissenabschnitten A links und rechts vom Mittelwert zusammen und zählt die Anzahl n_i der Einzelwerte ab, die jeweils in eine Klasse fallen. Trägt man dann in der betreffenden Klasse (z. B. A_2) als Ordinate die Häufigkeit gleich dem Verhältnis n_i/n (z. B. n_2/n in der Klasse A_2) auf, so erhält man bei voneinander unabhängigen nur zufällig schwankenden Einzelwerten mehr oder minder angenähert die Kurve der Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve des Bildes 1). Der Mittelwert ist zugleich der häufigste Wert. Das Integral der Häufigkeitskurve gibt die Gesamtanzahl der Einzelmeßwerte, die in den betrachteten Integrationsbereich hineinfallen; z. B. sind in dem Bereich von $\bar{x} - \sigma$ bis $\bar{x} + \sigma$ rund $P = 68\%$ aller Versuchswerte zu erwarten.

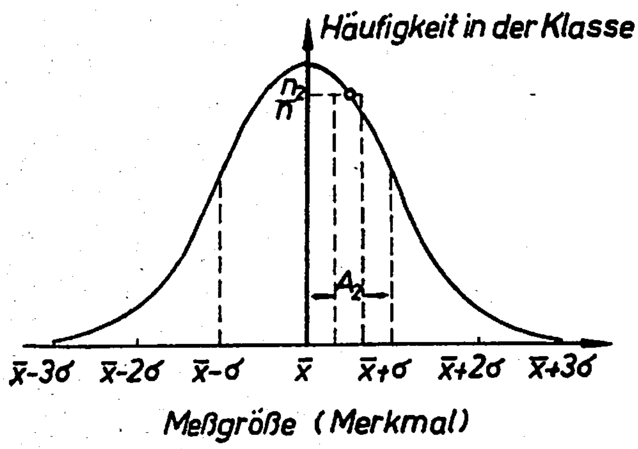


Bild 1.

Ob eine normal verteilte Grundgesamtheit vorliegt, kann man durch Eintragen der Summenhäufigkeit in das Wahrscheinlichkeitsnetz nachprüfen.

Zu 9.1. bis 9.4.

Beispiel zur Erläuterung der einzelnen Begriffe.

Die Länge eines Stabes vom Sollmaß 200 mm ist mit einem geeigneten Meßzeug 20mal gemessen worden. Der systematische Fehler des Meßzeuges möge so klein sein, daß er nicht berücksichtigt werden muß.

Die $n = 20$ Einzelwerte x_1 bis x_{20} sind im folgenden aufgeführt. Aus den Ergebnissen werden der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$, die Standardabweichung s, der Vertrauensbereich und die Vertrauensgrenzen des Mittelwertes für eine statistische Sicherheit von $P = 95\%$ errechnet.

a) Einzelwerte x_1 bis x_{20}

Messung	Länge x_i mm
1	200,10
2	200,00
3	199,85
4	200,15
5	199,95
6	199,90
7	200,35
8	200,00
9	200,15
10	199,80

Messung	Länge x_i mm
11	199,95
12	200,20
13	200,15
14	199,95
15	200,15
16	199,85
17	200,20
18	200,10
19	199,95
20	200,25

b) Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{20} \sum_{1}^{20} (x_i) = 200{,}05$ mm

c) Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{19} \sum (x_i - 200{,}05)^2} = \pm 0{,}15 \text{ mm}$$

d) Vertrauensbereich des Mittelwertes:

Für $P = 95\%$ ist $t = 2{,}1$ nach der Tabelle im Abschnitt 9.3.1.1. und damit der Vertrauensbereich

$$\frac{t}{\sqrt{n}} s = \pm 0{,}47 \cdot 0{,}15 \text{ mm} = \pm 0{,}07 \text{ mm}$$

obere Vertrauensgrenze: 200,12 mm
untere Vertrauensgrenze: 199,98 mm

Das Ergebnis wird angegeben als:

$$\bar{x} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s = 200{,}05 \text{ mm} \pm 0{,}07 \text{ mm}$$

oder mit relativem Vertrauensbereich als:

$$\bar{x}(1 \pm \varepsilon) = 200{,}05\,(1 \pm 0{,}035\%) \text{ mm}$$

Zu 9.5.1. und 9.5.2.

In der Geodäsie entspricht den Wiederhol-Bedingungen die „innere Genauigkeit", den Vergleich-Bedingungen die „äußere Genauigkeit".

Zu 9.5.3.

Stets sollte daher bei der Angabe des Meßergebnisses nach Abschnitt 9.4. vermerkt werden, ob der Vertrauensbereich sich auf Wiederhol-Bedingungen nach Abschnitt 9.5.1. oder Vergleich-Bedingungen nach Abschnitt 9.5.2. bezieht. Nur im letzteren Fall kommt dem Meßergebnis eine allgemeine Gültigkeit zu.

Zu 10.

Ist die Meßunsicherheit u_i einer Meßgröße x_i so ermittelt, wie in Abschnitt 11. angegeben, so läßt sich die Meßunsicherheit u_y eines Ergebnisses $y = F(x_1 \ldots x_i \ldots x_\nu)$ mit einiger Zuverlässigkeit abschätzen, wenn der Betrag der in u_i enthaltenen unbekannten aber abschätzbaren systematischen Fehler nicht merklich größer ist als der Anteil der zufälligen Fehler. Unter dieser Voraussetzung kann man die Meßunsicherheit u_y nach folgender Formel (siehe Abschnitt 10.2.) berechnen:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} u_i\right)^2}$$

Dabei dürfen allgemein in die vorstehende Beziehung nur die Unsicherheiten u_i, nicht die relativen Unsicherheiten u_i/x_i eingesetzt werden. Ist jedoch y ein reines Produkt oder ein Quotient oder eine Potenzfunktion der Größe x_i, so nimmt der Wurzelausdruck mit den relativen Unsicherheiten eine einfache Gestalt an.

Für z. B. $y = C \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \ldots$

wird dann die relative Unsicherheit:

$$\frac{u_y}{y} = \sqrt{\left(m_1 \cdot \frac{u_1}{x_1}\right)^2 + \left(m_2 \cdot \frac{u_2}{x_2}\right)^2 + \ldots}$$

Für den praktisch häufig vorkommenden Fall, daß für die Beurteilung der Zuverlässigkeit der Meßgrößen x_i nur die Fehlergrenzen G_i (siehe Abschnitt 12.) bekannt sind, innerhalb deren sie ermittelt werden können (z. B. Garantiefehlergrenzen der verwendeten Meßgeräte), gibt es keine mathematisch fundierte Regel für die Ermittlung der Fehlergrenzen G_y des Meßergebnisses $y = F(x_1 \ldots x_i \ldots x_\nu)$. Man kann nur sagen, die Fehlergrenzen G_y liegen zwischen einem größeren Betrag

$$G_y' = \pm \sum \left(\left| \frac{\partial F}{\partial x_i} G_i \right| \right)$$

und einem kleineren Betrag:

$$G_y'' = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2}$$

Eine endgültige Klärung dieser Frage ist zur Zeit noch nicht möglich.

Beispiel: Aus einer gleichzeitigen Messung der Leistung P, der Stromstärke I und der Klemmenspannung U soll der Leistungsfaktor: $y = \cos\varphi = \frac{P}{IU}$ bestimmt werden. Die bekannten relativen Fehlergrenzen (Garantiefehlergrenzen der Meßgeräte) beim Bestimmen der betrachteten Meßgrößen Leistung, Strom und Spannung seien:

$$\frac{G_1}{x_1} = \frac{\Delta P}{P} = \pm 0{,}5\%, \qquad \frac{G_2}{x_2} = \frac{\Delta I}{I} = \pm 1\%,$$

$$\frac{G_3}{x_3} = \frac{\Delta U}{U} = \pm 1\%$$

Die Ausrechnung nach vorstehender Formel führt in diesem Fall zu den relativen Gesamtfehlergrenzen:

$$\frac{G'_y}{y} = \pm (|0{,}005| + |0{,}01| + |0{,}01|) = \pm 0{,}025$$

$$= \pm 2{,}5\%$$

$$\frac{G''_y}{y} = \pm \sqrt{(0{,}005)^2 + (0{,}01)^2 + (0{,}01)^2} = \pm 0{,}015$$

$$= \pm 1{,}5\%$$

Zu 11.

Man gibt das Meßergebnis y zusammen mit der Meßunsicherheit u an. Dabei wird die Meßunsicherheit entweder in der Einheit des Meßergebnisses als $y \pm u$ oder relativ, im Verhältnis zum Meßergebnis als $y\,(1 \pm \varepsilon_u)$ mit $\varepsilon_u = \frac{u}{y}$ ausgedrückt.

Zu 12.1.

Die angegebene Definition für die Fehlergrenzen gilt allgemein. Fehlergrenzen umfassen — soweit nicht besondere Vereinbarungen getroffen werden — die erfaßten systematischen Fehler und zusätzlich auch die Schwankungen, welche durch die technischen Möglichkeiten und unvermeidlichen Ungleichmäßigkeiten der Fertigung sowie durch Alterungserscheinungen bedingt sind. Gelten die Fehlergrenzen nur unter bestimmten (einschränkenden) Nebenbedingungen (z. B. bei einer Temperatur von 20 °C oder in einem Temperaturbereich von 10 bis 30 °C), so müssen diese Nebenbedingungen aufgegeben werden.

Die Toleranzen auf dem Gebiet der Fertigungstechnik entsprechen sinngemäß den Garantiefehlergrenzen.

Zu 12.1. und 12.1.2.

Die bisher definierten Begriffe seien an folgenden einfachen Beispielen erläutert:

Beispiel 1: Ein Quecksilberthermometer habe den Anzeigebereich 0 bis + 50 °C und sei in 1/10 grd geteilt. Nach der Eichordnung sind die Eichfehlergrenzen (d. h. die Fehlergrenzen nach Abschnitt 12.) für dieses Thermometer: ± 0,15 grd. Das Thermometer wird bei der, mit Hilfe eines Normalthermometers bestimmten „richtigen" Temperatur von 20,00 °C in einem Wasserbad geprüft und zeige dabei die Temperatur 20,10 °C an (Ablesung, Anzeige). In diesem Meßpunkt ist deshalb der systematische

Fehler der Anzeige = Istanzeige minus Sollanzeige =
= 20,10 °C – 20,00 °C = + 0,10 grd

und fällt noch in die Eichfehlergrenzen. Wenn das auch an den übrigen Meßpunkten der Fall ist, kann das Gerät bei Einhaltung der sonst in Frage kommenden Eichvorschriften den Eichstempel erhalten.

Die Meßunsicherheit bei einem solchen Thermometer betrage ± 0,02 grd. Der Fehler der Anzeige läßt sich also bei Eichfehlergrenzen von ± 0,15 grd noch sicher genug feststellen (siehe Abschnitt 12.2.). Der Benutzer dieses Instrumentes kann sich nun entweder damit begnügen, daß sein Thermometer den „Eichstempel" erhalten hat, und innerhalb der Grenzen ± 0,15 grd „richtig" anzeigt, oder aber er wertet genauer aus und muß dann den Unterschied zwischen der Istanzeige von 20,10 °C und der Sollanzeige von 20,00 °C als systematischen Fehler nach Abschnitt 8. berücksichtigen. In diesem Fall kann er also mit seinem Gerät innerhalb der Meßunsicherheit ± 0,02 grd „richtig" messen.

Wird nicht der Fehler, sondern die Korrektion (Berichtigung) aufgeführt, so gilt: Sollanzeige gleich Istanzeige plus Korrektion, d. h. 20,00 °C = 20,10 °C — 0,10 grd (Fehler und Korrektion haben entgegengesetzte Vorzeichen).

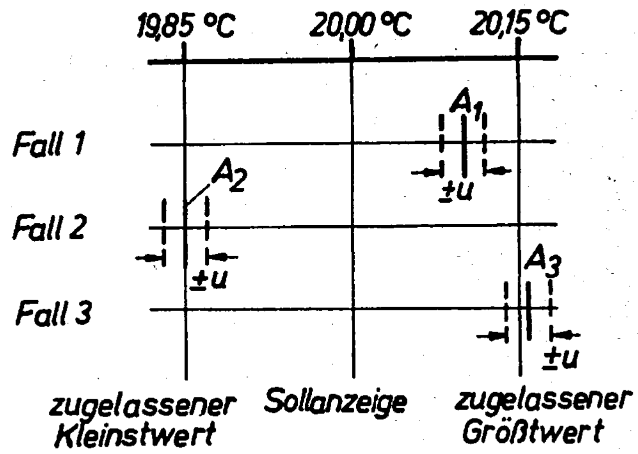


Bild 2. Verschiedene Fälle von Istanzeigen

Bild 2 soll an Hand des Beispiels 1 erklären, wie die Definition der Fehlergrenzen auszulegen ist.

Der Fall 1 entspricht dem Zahlenbeispiel mit einer Istanzeige A_1 = 20,10 °C.

Der Fall 2 stellt einen Grenzfall dar, bei dem die Istanzeige A_2 = 19,85 °C gleich dem zugelassenen Kleinstwert ist und die Eichfehlergrenzen gerade noch eingehalten werden.

Im Fall 3 liegt die Istanzeige A_3 = 20,16 °C außerhalb der Eichfehlergrenzen; das Thermometer erhält keinen Eichstempel.

Zweckmäßig wird im Einzelfall vereinbart, in welcher Weise die Istanzeige präzise einzusetzen ist (z. B. als einzelner Meßwert oder als Mittelwert aus einer bestimmten Anzahl, z. B. $n = 3$ Einzelwerten).

Beispiel 2: Die Gesamtlänge eines 1-m-Maßstabes aus Stahl wird bei der Richtigkeitsprüfung durch Vergleich mit einem Normalmaßstab zu 1000,3 mm festgestellt. Das Istmaß ist also nach Abschnitt 8.1.2. gleich 1000,3 mm, das Sollmaß 1000,0 mm. Nach Abschnitt 8.1.2. gilt daher:

Fehler der Gesamtlänge = 1000,3 mm – 1000,0 mm = + 0,3 mm. Da die Eichfehlergrenze in diesem Falle ± 0,4 mm, d. h. der zulässige Bereich 999,6 mm bis 1000,4 mm beträgt, erhält der Maßstab den Eichstempel.

Zu 12.1.1.

Besondere Bedingungen für elektrische Meßinstrumente
(siehe VDE 0410)

Die Einhaltung der Garantiefehlergrenzen (± a% bei Klasse a) wird bei den Nennwerten (oder in den Nennbereichen) bestimmter Einflußgrößen A, B ... garantiert. Für die Einflußgrößen sind im Anschluß an ihre Nennwerte (oder Nennbereiche) Einflußbereiche vorgesehen.

Haben sämtliche Einflußgrößen ihre Nennwerte oder liegen in einem Nennbereich und wandert jeweils eine, z. B. nur die Einflußgröße A, von ihrem Nennwert (oder von dem Grenzwert eines Nennbereiches) aus in den anschließenden Einflußbereich, so darf sich hierdurch die Anzeige um höchstens ± a% ändern.

Beispiel: Ein Spannungsmesser der Klasse 0,2 mit 150 V Meßbereich hat eine Fehlergrenze von ± 0,2% vom Endwert des Meßbereiches, d. h. ± 0,3 V, wenn jede der festgelegten Einflußgrößen ihren Nennwert hat (oder im Nennbereich liegt). Nimmt z. B. die Temperatur als Einflußgröße A (Nennwert 20 °C) einen beliebigen Wert innerhalb der Einflußbereiche von 10... 20 °C oder 20... 30 °C an, so darf sich hierbei die Anzeige gegenüber der Anzeige bei 20 °C um höchstens ± 0,3 V ändern.

Stichwortverzeichnis

Die Zahlen beziehen sich auf die Abschnitte des Standards oder auf die Abschnitte der Anmerkungen.

Hinweise:

Entstanden unter Berücksichtigung von DIN 1319 Ausg. 1.62.
Anwendungsbeispiele, siehe TGL 0-53 804 „Prüfung von Textilien, Auswertung der Meßergebnisse" und TGL 0-51 849 „Prüfung von Mineralölen, Prüffehler und Toleranz".